Tentamensskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Lördag den 15 mars, 2008

8.30 - 13.30

1 [10] Bestäm a, b, c så att vektorfältet

$$(3x^2 + ay^2 + bxz, cxy, 3z^2 - 3x^2)$$

är konservativt samt har försvinnande divergens, och finn därefter en potential $U(x, y, z)$ och visa att den är harmonisk

2 [10] Funktionen $F(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + 6x + 12y$ har en kritisk punkt i $(1, 1)$ Avgör huruvida vi har ett lokalt maximum, minimum eller sadelpunkt.

3 [10] Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\triangle} \sin(x + 2y)dxdy$$

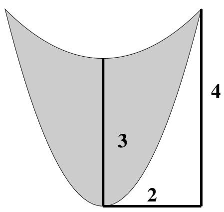
över triangeln med hörn i punkternas $(0, 0), (\pi/2, 0)$ och $(0, \pi)$

4 [10] Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

där γ är spiralen given i polära ko-ordinater av $r = \theta$, där θ går från π till 5π

5 [15]



En glasskål är formad genom rotation (via dess symmetriaxel) av figuren till vänster, vilken är utskuren av två parabelbågar och med angivna mått. Beräkna

a) dess volym

b) tyngdpunkt.

6 [15] En yta H parametriseras av $(\tan(s)\cos(t), \tan(s)\sin(t), t)$, för rektangeln $-\frac{\pi}{4} \leq s \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq t \leq \pi$.

a) Sätt upp en dubbelintegral för att beräkna arean av ytan H och om möjligt beräkna denna

b) Låt C vara kurvan som är bilden av linjen $t = 2s + \frac{\pi}{2}$ i parameterrektangeln. Finn dess tangent i punkten $(0, 0, \pi)$ *Kom ihåg att* $\frac{d \tan t}{dt} = 1 + \tan^2 t$

7 [15] Låt $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ med $a^2 < b^2 < c^2$ och betrakta dess gradientfält $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$

a) Finn maximum och minimum av längden av $\|\nabla F\|$ på ellipsoiden E given av nivåytan $F(x, y, z) = 1$

b) Beräkna ytintegralen $\iint_E \nabla F \cdot N dS$

c) Ur a) och b) härled en övre och undre begränsning av arean av E.

8 [20] Givet en fix punkt P på periferin av en cirkel med radien 1. Beräkna medelavståndet mellan P och en punkt i cirkelskivan.

9 [20] Betrakta avbildningen från kvadraten $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ in i $\mathbb{R}^4$ givet av $(\theta, \psi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\psi), \sin(\psi))$

a) För varje (θ, ψ) skriv upp matrisen M för den linjära approximationen i denna punkt.

b) Visa att om v, w är två godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^2$ gäller att skalärprodukterna $< v \cdot w >$ och $< Mv \cdot Mw >$ är lika (den senare produkten tagen i $\mathbb{R}^4$).

c) Visa att bilden av kvadraten är en torus i $\mathbb{R}^4$ d.v.s. att den kan beskrivas som produkten av två cirklar.

d) Beräkna torusens area.

Ulf Persson
11/3 2008

Skrivningsvakt: Jonatan Vasilis `tel: 076 2721861/2721860`

50 poäng ger garanterat godkänt
100 poäng ger garanterat väl godkänt