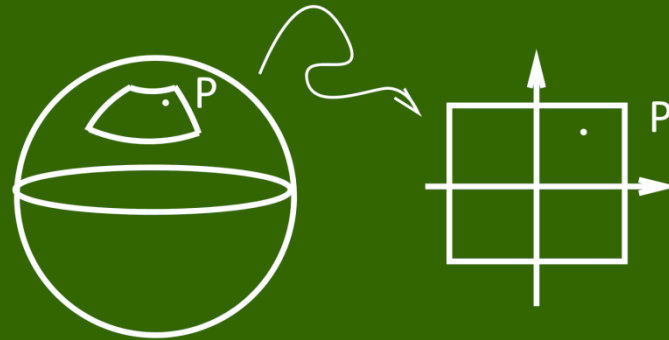


Varför flera variabler ?

Uppgift: Beskriv vädret i ett område på jordytan.

För varje P i området och tidpunkt t behövs åtminstone:



temp (T), tryck (p), luftfuktighet (h), vindriktning och styrka (en vektor (v_1, v_2)).

De varierar alla med P och t .

Till varje (P, t) ordnas

$$(T(P, t), p(P, t), h(P, t), v_1(P, t), v_2(P, t)),$$

en avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^5$

Avstånd och vinklar

Kan *addera* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Avståndet mellan $\mathbf{0}$ och $\mathbf{x}$ ges av

$$|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (\text{motiveras av Pythagoras sats})$$

Två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ bör vara vinkelräta om

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \text{ eller (ekvivalent) } |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2$$

eller

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2$$

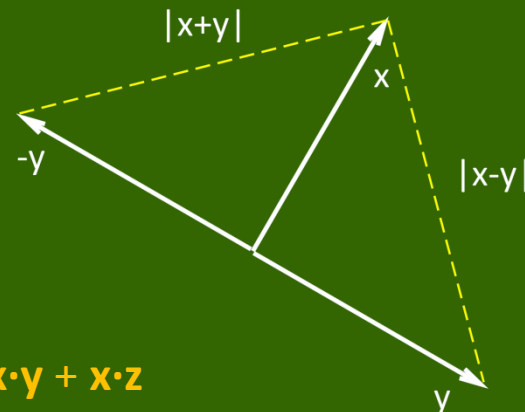
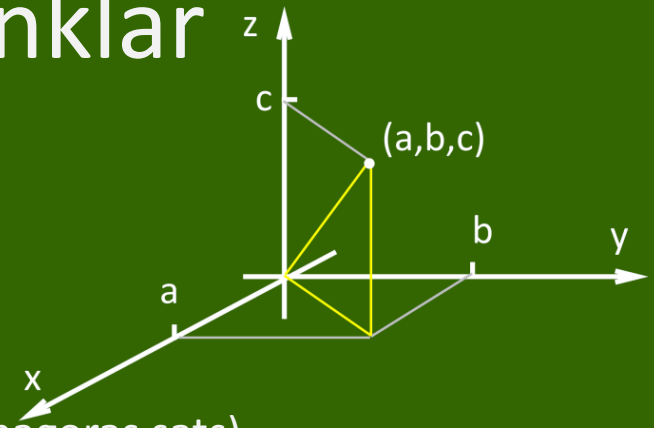
som förenklas till

$$0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Motiverar införandet av *skalärprodukten*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Observera att $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ och att $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$



Cauchy - Schwarz:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \quad \text{med likhet precis när } \mathbf{x} \text{ och } \mathbf{y} \text{ är parallella.}$$

Visas algebraiskt.

Vinkel mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Söker a så att $a\mathbf{x} - \mathbf{y}$ är vinkelrät mot $\mathbf{x}$. Ska ha

$$0 = \mathbf{x} \cdot (a\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a|\mathbf{x}|^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{eller} \quad a = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) / |\mathbf{x}|.$$

Definitionen av cosinus bör nu ge att

$$\cos(\theta) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) / (|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|). \quad \text{Vi har använt intuition för att komma fram till}$$

detta, men Cauchy – Schwartz visar att HL är mellan -1 och 1 , så vi kan ta detta som *definition* av vinkeln θ mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Den mäts mellan 0 och π .

Triangelolikheten.

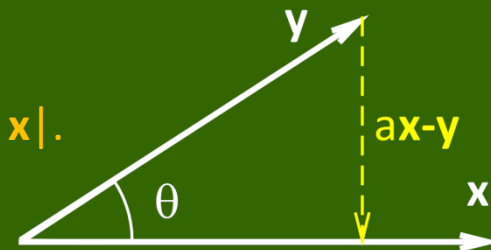
$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad (\text{Uppenbart enligt intuition som vi inte vill förlita oss till})$$

Följer från Cauchy - Schwarz:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2$$

Från detta följer den *utökade triangelolikheten*:

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$



Vanliga figurer i planet

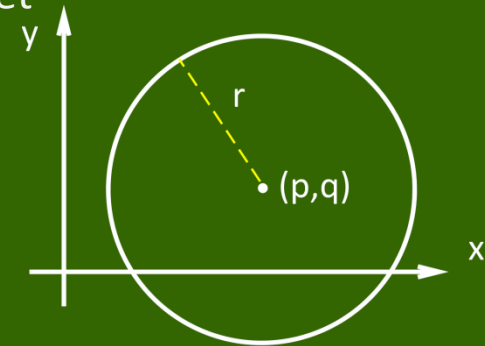
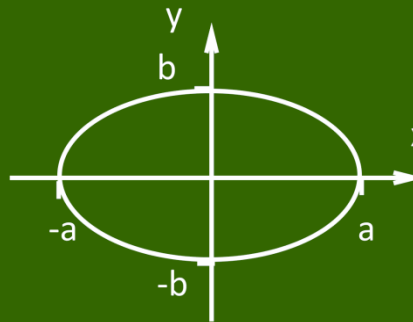
Cirkel med radie r och medelpunkt $\mathbf{p}$: alla $\mathbf{x}$ med avstånd r till $\mathbf{p}$.

Ekvation: $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 = r^2$. Med $\mathbf{p} = (p,q)$ och $\mathbf{x} = (x,y)$ blir det

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Ellips (skalförändrad cirkel):

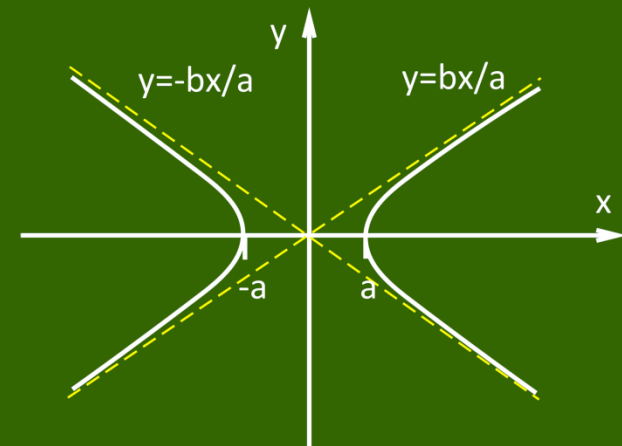
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Hyperbel: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ Detta ger

$$\left(\frac{b}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

som ger $\frac{y}{x} \rightarrow \pm \frac{b}{a}$ när $x \rightarrow \pm\infty$



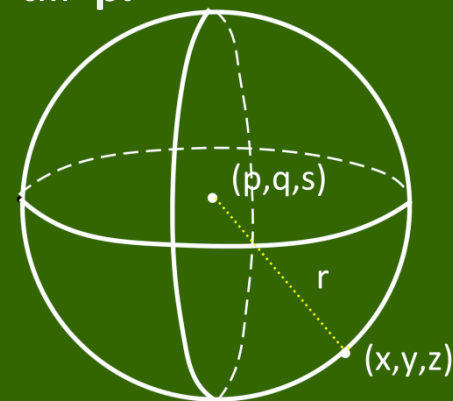
Vanliga figurer i rummet

Klot och sfär med radie r och medelpunkt $\mathbf{p}$: alla $\mathbf{x}$ med avstånd r till $\mathbf{p}$.

Ekvation: $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 \leq r^2$ respektive $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|^2 = r^2$.

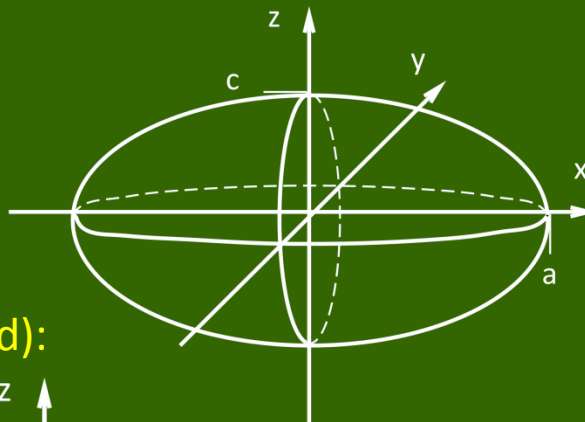
Med $\mathbf{p} = (p, q, s)$ och $\mathbf{x} = (x, y, z)$ blir det

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-s)^2 \leq r^2 \quad \text{resp} \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-s)^2 = r^2.$$



Ellipsoid (skalförändrad sfär):

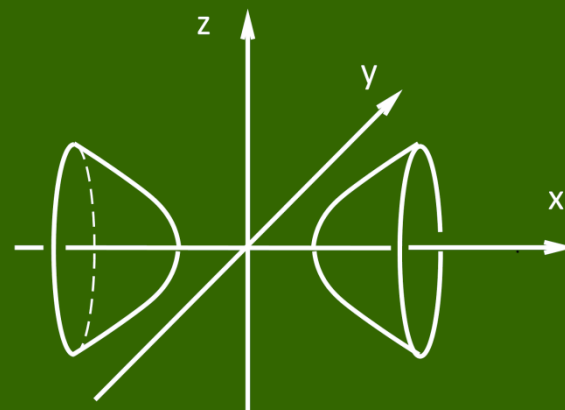
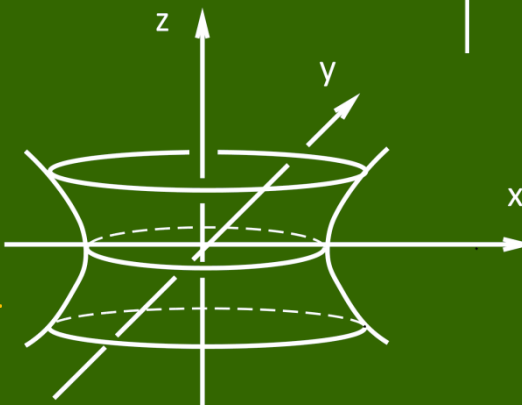
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$



Hyperboloid (enmantlad och tvåmantlad):

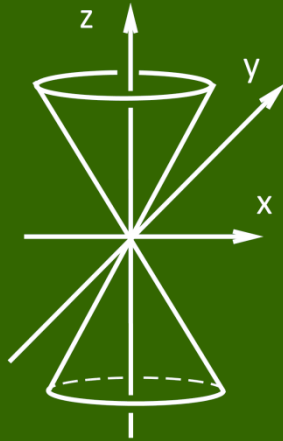
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$



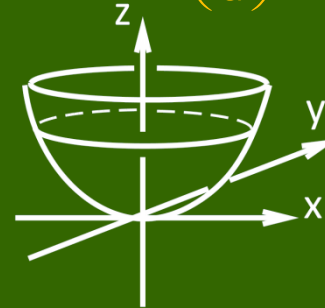
Kon:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z^2$$



Paraboloid:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$$

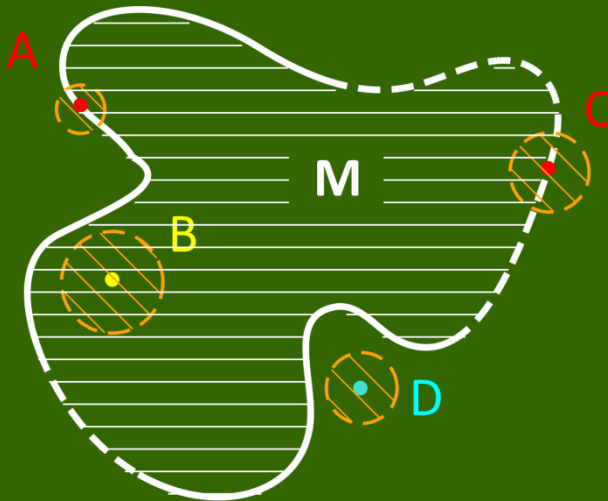


Olika typer av punkter i för hållande till en given delmängd M till $\mathbb{R}^n$

En punkt P är en **inre punkt** till M om det finns en boll kring P innehållen i M .

En punkt P är en **yttre punkt** till M om det finns en boll kring P som inte rår M .

En punkt P är en **randpunkt** till M om varje boll kring P rår M och det som ligger utanför M (komplementet till M).



A och C är randpunkter till M .

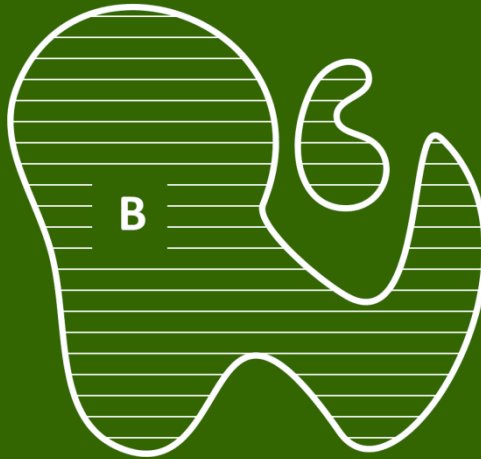
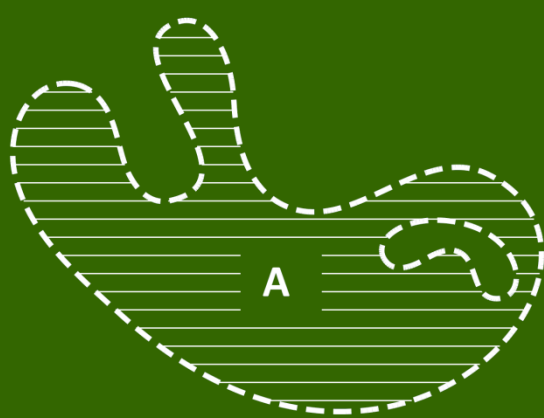
B är en inre punkt till M .

D är en yttre punkt till M .

Öppna och slutna mängder

En mängd är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter.

En mängd är *öppen* om den inte innehåller någon enda av sina randpunkter.



A är öppen.

B är sluten.