

## Variabelbyte

Ett område  $D$  i  $x, y$ -planet är besvärligt.

Man lyckas hitta en bijektiv avbildning

$$(u, v) \mapsto (g(u, v), h(u, v)) = \mathbf{k}(u, v)$$

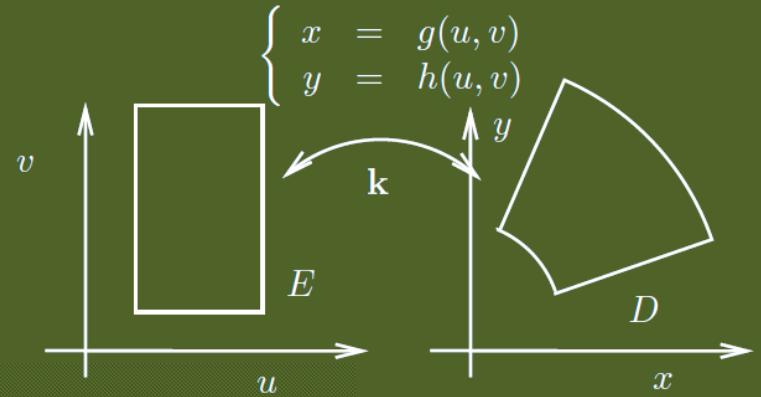
så att  $D$  motsvaras av ett enklare område  $E$  i  $u, v$ -planet.

Vi kallar  $\mathbf{k}$  för ett *variabelbyte*.

Vill kunna beräkna

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

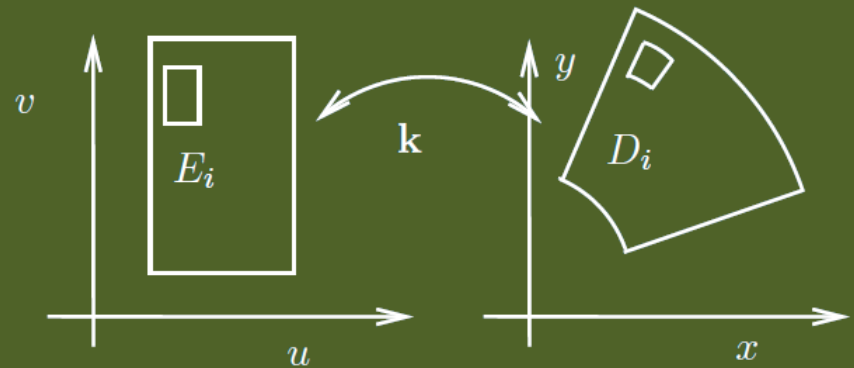
med hjälp av  $E$



Vi delar in  $E$  i mindre områden  $E_i$ .

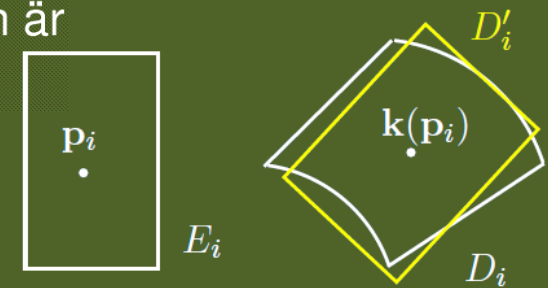
Vi använder  $\mathbf{k}$  och får en motsvarande uppdelning av  $D$  i områden  $D_i$ .

Vi väljer en punkt  $\mathbf{p}_i \in E_i$ .



Funktionen  $\mathbf{k}$  har en linearisering i  $\mathbf{p}_i$ , som väsentligen är multiplikation med funktionalmatrisen  $\mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)$ .

Lineariseringen ger ett annat delområde  $D'_i$  till  $D$  som väsentligen har samma area som  $D_i$ .



Eftersom lineariseringen bestäms av multiplikation med matrisen  $\mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)$  har vi kontroll över arean av  $D'_i$ :

$$\mu(D) \approx \mu(D'_i) = |\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)| \mu(E_i)$$

Riemannsumma:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))\mu(D_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))\mu(D_n) &\approx \\ \approx f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_1)|\mu(E_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_n)|\mu(E_n) \end{aligned}$$



Riemannsumma:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))\mu(D_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))\mu(D_n) \approx \\ & \approx f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_1)|\mu(E_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_n)|\mu(E_n) \end{aligned}$$

Approximationen blir bättre ju finare indelning vi gör av  $E$ .

Vänstra ledet närmar sig då  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

Kom ihåg att  $\mathbf{k}(u, v) = (g(u, v), h(u, v)) = (x, y)$ . Det betyder att

$$\det \mathbf{k}' = \frac{d(g, h)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

Högra ledet i approximationen närmar sig

$$\iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv$$

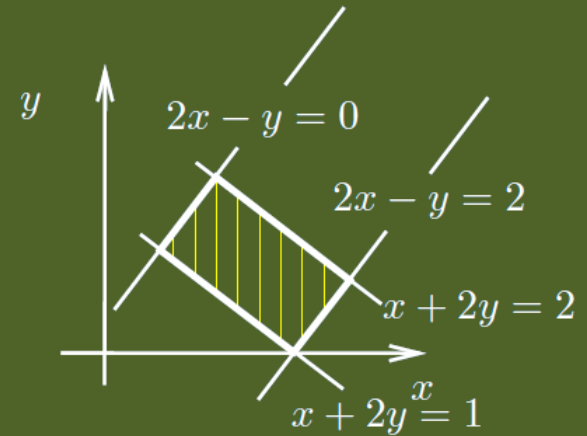
Detta gör det troligt att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv$$

**Ex** Beräkna

$$\iint_D \frac{x}{x+2y} dx dy$$

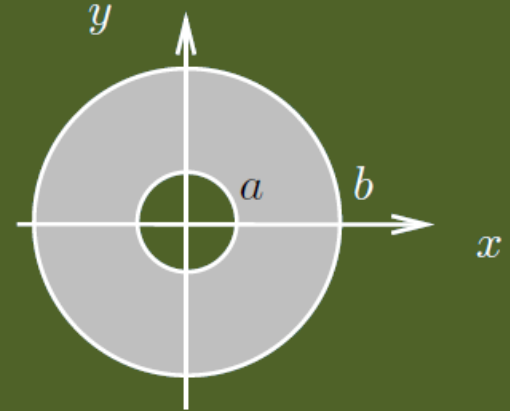
där  $D$  ges i figuren.



**Ex** Beräkna

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

där  $D$  ges i figuren.



Polära koordinater  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ .

Ger  $|d(x, y)/d(r, t)| = r$

**Ex** Beräkna

$$\iint_D x^2 dx dy$$

där  $D$  ges av  $x^2 + 4y^2 + 2x \leq 0$ .



# Integration med nivåkurvor

T.ex.  $\iint_D (x + y)e^{x+y} dx dy$

Speciell teknik för beräkning av  $\iint_D f(g(x, y)) dx dy$

Vi ser att  $f$  är konstant längs nivåkurvan  $g(x, y) = u$ . Detta ska utnyttjas!

Nivåkurvan  $g(x, y) = u$  bestämmer en del  $D_u$  av  $D$ .

Låt  $A(u) = \mu(D_u)$  vara arean av  $D_u$ , när  $a \leq u \leq b$ .

Välj delningspunkter  $u_i$  i  $[a, b]$

Medelvärdessatsen (envariabel!) ger  $A(u_{i+1}) - A(u_i) \approx A'(u_i)(u_{i+1} - u_i)$ .

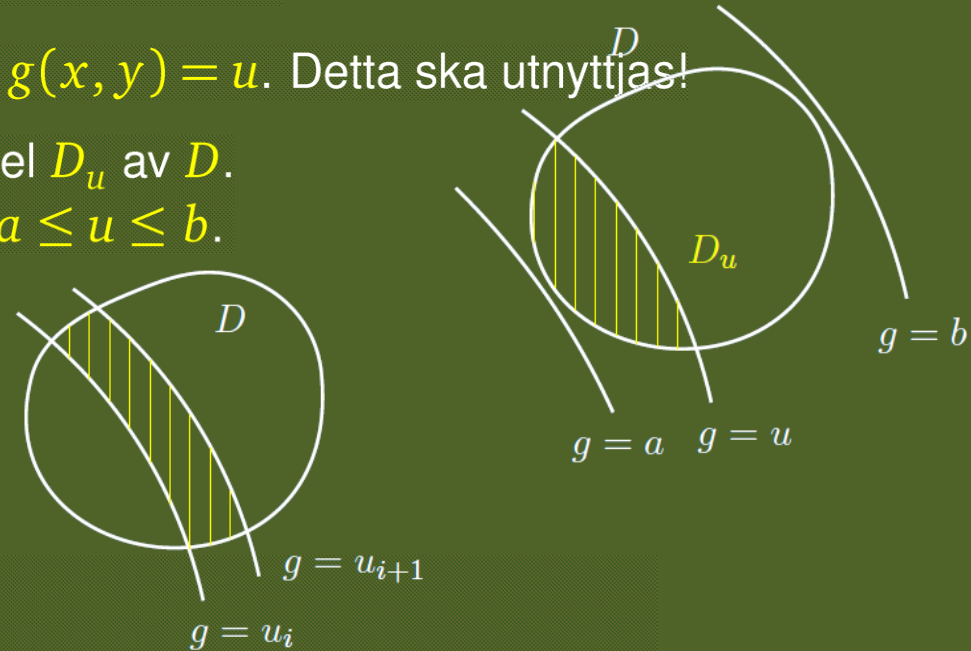
Riemannsumma för integralen:

$$f(u_1)A'(u_1)(u_2 - u_1) + \cdots + f(u_{n-1})A'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})$$

Detta är också en Riemannsumma för  $\int_a^b f(u)A'(u) du$

Alltså:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b f(u)A'(u) du$$



**Ex** Beräkna

$$\iint_D e^{(x+y)^2} dx dy$$

där  $D$  ges av  $0 \leq x, 0 \leq y \leq 1 - x$ .



## Generaliserade dubbelintegraler

Förutsätter att  $f$  är *positiv*  $f \geq 0$  och *kontinuerlig*.

Två orsaker till problem:

- funktionen  $f$  kan vara obegränsad på  $D$
- Området  $D$  kan vara obegränsat.

Vad är då  $\iint_D f \, dx \, dy$ ?

*Avskärning* till  $D$ : begränsat (kvadrerbart) delområde  $\Omega$  där  $f$  är begränsad.

Kan beräkna talet  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy$ .

Olika  $\Omega$  ger olika värden! Låt  $M$  vara mängden av alla dessa värden.

$\iint_D f \, dx \, dy$  är *konvergent* om  $M$  är uppåt begränsad, annars *divergent*

När  $\iint_D f \, dx \, dy$  är konvergent sätts dess *värde* till  $\sup M$  (supremum av  $M$ ).

## Generaliserad befielse

Om, vid upprepad integration, den inre integralen (map  $dy$  eller  $dx$ ) är konvergent för varje fixt  $x$  (resp  $y$ ), så är

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

konvergent precis när den yttre integralen är det. De har i så fall samma värde.

**Ex** Avgör om  $\iint_D e^{-x-y} dx dy$  är konvergent eller divergent när  $D$  ges av  $0 \leq y \leq x$ .



# Trippelintegraler

Fungerar som dubbelintegraler:  
upprepad integration möjlig, variabelbyte,  
integration med nivåytor (area ersätts med volym)

**Ex** Beräkna  $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$   
när  $D$  ges av  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

