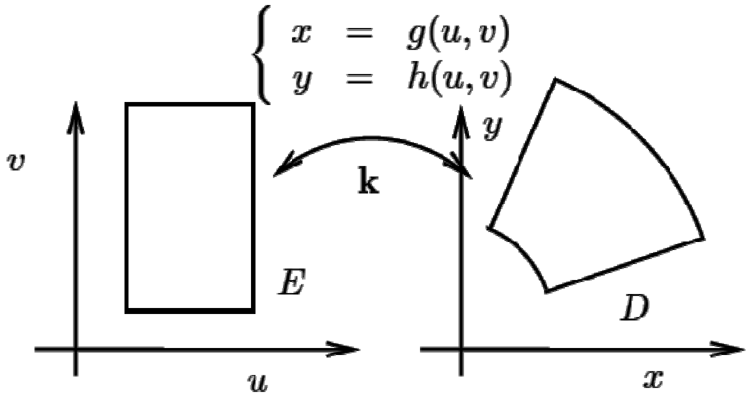
Variabelbyte

Ett område D i $x,\ y$-planet är besvärligt.



Man lyckas hitta en bijektiv avbildning

$$(u,v) \mapsto (g(u,v), h(u,v)) = \mathbf{k}(u,v)$$

så att D motsvaras av ett enklare område E i $u,\ v$-planet.

Vi kallar $\mathbf{k}$ för ett *variabelbyte*.

Vill kunna beräkna

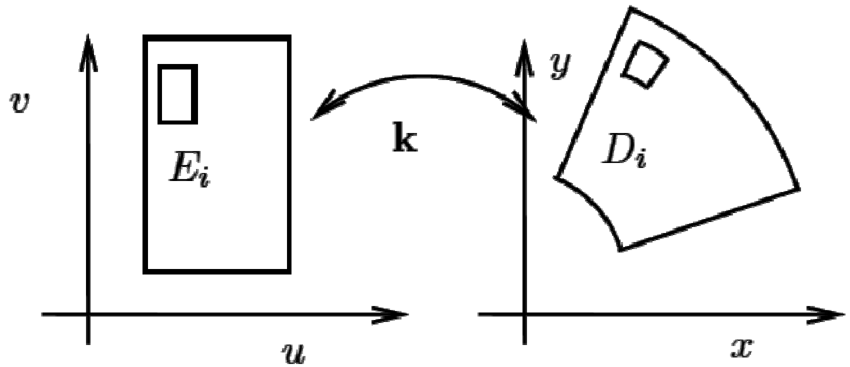
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

med hjälp av E

Vi delar in E i mindre områden E_i.

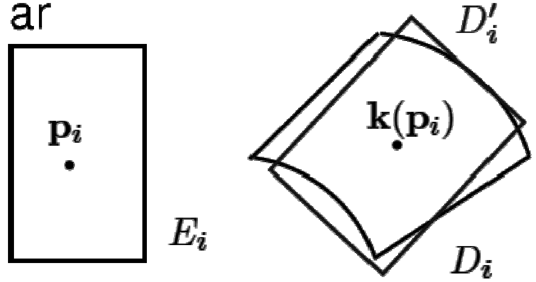
Vi använder $\mathbf{k}$ och får en motsvarande uppdeling av D i områden D_i.

Vi väljer en punkt $\mathbf{p_i} \in E_i$.



Funktionen $\mathbf{k}$ har en linearisering i $\mathbf{p}_i$, som väsentligen är multilplikation med funktionalmatrisen $\mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)$.

Lineariseringen ger ett annat delområde D_i' till D som väsentligen har samma area som D_i.



Eftersom lineariseringen bestäms av multiplikation med matrisen $\mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)$ har vi kontroll över arean av D_i' :

$$\mu(D) \approx \mu(D_i') = |\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_i)|\mu(E_i)$$

Riemannsumma:

$$f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))\mu(D_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))\mu(D_n) \approx$$

$$\approx f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_1)|\mu(E_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_n)|\mu(E_n)$$

Riemannsumma:

$$f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))\mu(D_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))\mu(D_n) \approx$$

$$\approx f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_1))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_1)|\mu(E_1) + \cdots + f(\mathbf{k}(\mathbf{p}_n))|\det \mathbf{k}'(\mathbf{p}_n)|\mu(E_n)$$

Approximationen blir bättre ju finare indelning vi gör av E.

Vänstra ledet närmar sig då $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Kom ihåg att $\mathbf{k}(u,v) = (g(u.v), h(u,v)) = (x,y)$. Det betyder att

$$\det \mathbf{k}' = \frac{d(g,h)}{d(u,v)} = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}$$

Högra ledet i approximationen närmar sig

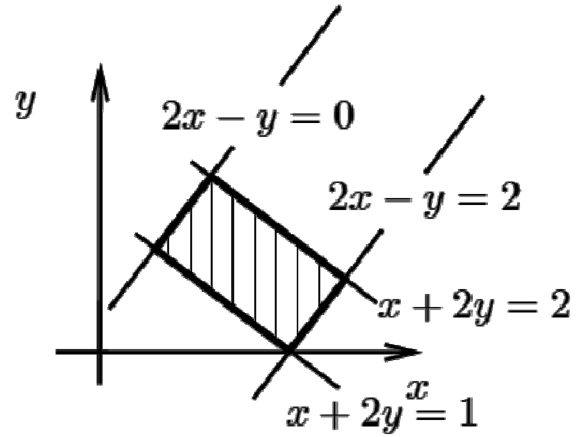
$$\iint_E f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv$$

Detta gör det troligt att

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv$$

Ex Beräkna

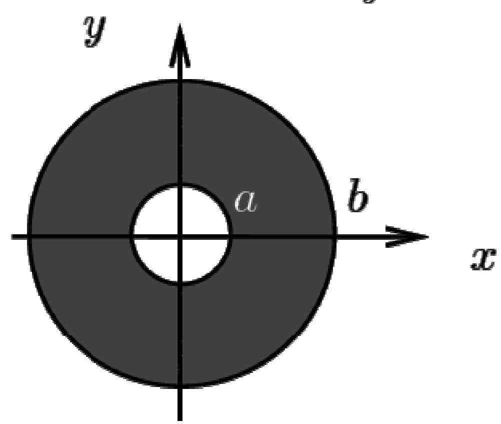
$$\iint_D \frac{x}{x+2y}\,dx\,dy$$



där D ges i figuren.

Ex Beräkna

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



där D ges i figuren.

Polära koordinater $x = r\cos t,\ y = r\sin t$.
Ger $|d(x,y)/d(r,t)| = r$

Ex Beräkna

$$\iint_D x^2\,dx\,dy$$

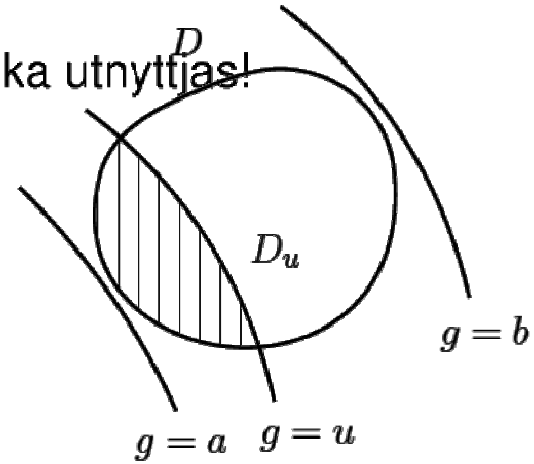
där D ges av $x^2+4y^2+2x \le 0$.

Integration med nivåkurvor

T.ex. $\iint_D (x+y)e^{x+y}\,dx\,dy$

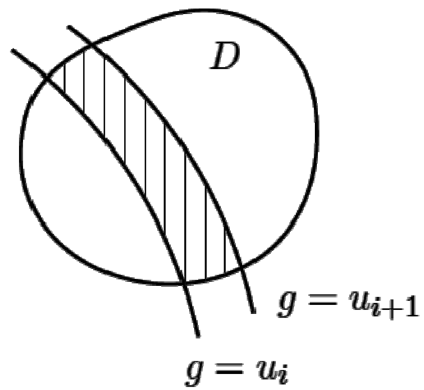
Speciell teknik för beräkning av $\iint_D f(g(x,y))\,dx\,dy$

Vi ser att f är konstant längs nivåkurvan $g(x,y)=u$. Detta ska utnyttjas!



Nivåkurvan $g(x,y)=u$ bestämmer en del D_u av D.
Låt $A(u)=\mu(D_u)$ vara arean av D_u, när $a \le u \le b$.

Välj delningspunkter u_i i $[a,\ b]$



Medelvärdessatsen (envariabel!) ger
$A(u_{i+1})-A(u_i)\approx A'(u_i)(u_{i+1}-u_i)$.

Riemannsumma för integralen:

$$f(u_1)A'(u_1)(u_2-u_1)+\cdots+f(u_{n-1})A'(u_{n-1})(u_n-u_{n-1})$$

Detta är också en Riemannsumma för $\int_a^b f(u)A'(u)\,du$

Alltså:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b f(u)A'(u)\,du$$

Ex Beräkna

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$$

där D ges av $0 \le x$, $0 \le y \le 1 - x$.

Generaliserade dubbelintegraler

Förutsätter att f är *positiv* $f \geq 0$ och *kontinuerlig*.

Två orsaker till problem:

- funktionen f kan vara obegränsad på D
- Området D kan vara obegränsat.

Vad är då $\iint_D f\,dx\,dy$?

Avskärning till D: begränsat (kvadrerbart) delområde Ω där f är begränsad.

Kan beräkna talet $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$.

Olika Ω ger olika värden! Låt M vara mängden av alla dessa värden.

$\iint_D f\,dx\,dy$ är *konvergent* om M är uppåt begränsad, annars *divergent*

När $\iint_D f\,dx\,dy$ är konveget sätts dess *värde* till $\sup M$ (supremum av M).

Generaliserad befrielse

Om, vid upprepad integration, den inre integralen (map dy eller dx) är konvergent för varje fixt x (resp y) , så är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

konvergent precis när den yttre integralen är det. De har i så fall samma värde.

Ex Avgör om $\iint_D e^{-x-y}\,dx\,dy$ är konvergent eller divergent när D ges av $0 \leq y \leq x$.

Trippelintegraler

Fungerar som dubbelintgraler:
upprepad integration möjlig, variabelbyte,
integration med nivåytor (area ersätts med volym)

Ex Beräkna $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$
när D ges av $x^2+y^2\leq z^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 1.$