

Fler exempel på trippelintegraler

Ex Den sfärska kalotten $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1$ har i punkten (x, y, z) densiteten $z(x^2 + y^2)$. Beräkna kalottens massa.

Ex Beräkna

$$\iiint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

där D är klotet med medelpunkt i origo och radie R .

Vid sfäriska koordinater är

$$\left| \frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \theta$$

Ex Beräkna

$$\iiint_D x^3 dx dy dz$$

där D är klotet med medelpunkt i origo och radie R .

Symmetrier kan utnyttjas för att direkt se att vissa integraler blir **0**.

Volymberäkningar

Volymen av en kropp D ges av

$$\iiint_D dx dy dz$$

Ex Beräkna volymen av kroppen som ges av
 $x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 2 + 2(x^2 + y^2)/3, z \geq 0$.

Ex Beräkna volymen av kroppen som ges av
 $x^2 + y^2 + (z - x^2)^2 \leq 1$.

Ex Beräkna volymen av kroppen som begränsas av
ytorna $z = 8 - y^2$ och $z = 4x^2 + y^2$.



Ytintegraler

En funktion f är (bara) definierad på en yta Y i rummet. Vi vill kunna beräkna

$$\iint_Y f \, dS$$

dvs summera alla funktionsvärden över ytan.

Dela in ytan i små områden Y_i som vi kan beräkna arean av.

Välj en punkt \mathbf{p}_i i varje Y_i .

En Riemannsumma för det vi vill beräkna är

$$f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n)$$

Välj en parametrisering $\mathbf{r}(s, t)$, $(s, t) \in D$ av Y och gör

en indelning av D i delområden D_i . Välj också punkter $\mathbf{q}_i \in D_i$.

Vi får en motsvarande uppdelning av Y i delar $\mathbf{r}(D_i) = Y_i$ med punkter $\mathbf{r}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{p}_i$.

Linerariseringen av \mathbf{r} ger i \mathbf{q}_i en *areaförändring* som ges av $|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_i) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_i)|$.

Detta ger

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n) \approx \\ & \approx f(\mathbf{p}_1)\mu(D_1)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_1) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_1)| + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(D_n)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_n) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_n)| \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n) \approx \\ & \approx f(\mathbf{p}_1)\mu(D_1)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_1) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_1)| + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(D_n)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_n) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_n)| \end{aligned}$$

som motiverar

$$\iint_Y f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(s, t)) |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| \, ds \, dt$$

Ytintegraler kan alltså beräknas genom att man väljer en parametrisering av ytan och sedan räknar ut en vanlig dubbelintegral i planet.

Speciellt har vi att *arean* av ytan Y i rummet ges av

$$\iint_Y dS$$

Exempel på ytintegraler

Ex Beräkna arean av en sfär med radien R

Ex Beräkna massan av en halvsfären med radien R , medelpunkt i origo och $z \geq 0$, när densiteten i (x, y, z) är z (massa / areaenhet)

Ex Härled en formel för beräkning av arean av ytan som uppstår när grafen till $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar ett varv runt y -axeln ($f \geq 0$).

Ex Härled en formel för beräkning av arean av grafen till $f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Ex Ytan Y paramteriseras av $\mathbf{r}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi$. Den har i punkten $\mathbf{r}(s, t)$ densiteten s . Beräkna massan.

