## Fler exempel på trippelintegraler

**Ex** Den sfärsika kalotten $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 1$ har i punkten $(x,y,z)$ dentsiteten $z(x^2+y^2)$. Beräkna kalottens massa.

**Ex** Beräkna

$$\iiint_D \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

där $D$ är klotet med medellpunkt i origo och radie $R$.

Vid sfäriska koordinater är

$$\left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}\right| = r^2\sin\theta$$

**Ex** Beräkna

$$\iiint_D x^3\,dx\,dy\,dz$$

där $D$ är klotet med medellpunkt i origo och radie $R$.

Symmetrier kan utnyttjas för att direkt se att vissa integraler blir 0.

## Volymberäkningar

Volymen av en kropp $D$ ges av

$$\iiint_D dx\,dy\,dz$$

**Ex** Beräkna volymen av kroppen som ges av $x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 2 + 2(x^2 + y^2)/3,\ z \geq 0$.

**Ex** Beräkna volymen av kroppen som ges av $x^2 + y^2 + (z - x^2)^2 \leq 1$.

**Ex** Beräkna volymen av kroppen som begränsas av ytorna $z = 8 - y^2$ och $z = 4x^2 + y^2$.

## Ytintegraler

En funktion $f$ är (bara) definierad på en yta $Y$ i rummtet. Vi vill kunna beräkna

$$\iint_Y f\,dS$$

dvs summera alla funktionsvärden över ytan.

Dela in ytan i små områden $Y_i$ som vi kan beräkna arean av.
Välj en punkt $\mathbf{p}_i$ i varje $Y_i$.

En Riemannsumma för det vi vill beräkna är

$$f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n)$$

Välj en paramtetrisering $\mathbf{r}(s,t)$, $(s,t) \in D$ av $Y$ och gör
en indelning av $D$ i delområden $D_i$. Välj också punkter $\mathbf{q}_i \in D_i$.

Vi får en motsvarande uppdelning av $Y$ i delar $\mathbf{r}(D_i) = Y_i$ med punkter $\mathbf{r}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{p}_i$.

Lineraiseringen av $\mathbf{r}$ ger i $\mathbf{q}_i$ en *areaförändring* som ges av $|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q_i}) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q_i})|$.
Detta ger

$$f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n) \approx$$

$$\approx f(\mathbf{p}_1)\mu(D_1)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_1) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_1)| + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(D_n)|\mathbf{r}'_s(\mathbf{q}_n) \times \mathbf{r}'_t(\mathbf{q}_n)|$$

Detta ger

$$f(\mathbf{p}_1)\mu(Y_1) + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(Y_n) \approx$$

$$\approx f(\mathbf{p}_1)\mu(D_1)|\mathbf{r}_s'(\mathbf{q}_1) \times \mathbf{r}_t'(\mathbf{q}_1)| + \cdots + f(\mathbf{p}_n)\mu(D_n)|\mathbf{r}_s'(\mathbf{q}_n) \times \mathbf{r}_t'(\mathbf{q}_n)|$$

som motiverar

$$\iint_Y f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(s,t))|\mathbf{r}_s' \times \mathbf{r}_t'|\,ds\,dt$$

Ytintegraler kan alltså beräknas genom att man väljer en parametrisering av ytan och sedan räknar ut en vanlig dubbelintegral i planet.

Speciellt har vi att *arean* av ytan $Y$ i rummet ges av

$$\iint_Y dS$$

## Exempel på ytintegraler

**Ex** Beräkna arean av en sfär med radien $R$

**Ex** Beräkna massan av en halvsfären med radien $R$,medelpunkt i origo och $z \geq 0$, när densiteten i $(x, y, z)$ är $z$ (massa / areaenhet)

**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av ytan som uppstår när grafen till $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar ett varv runt $y$-axeln ($f \geq 0$).

**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av grafen till $f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

**Ex** Ytan $Y$ paramteriseras av $\mathbf{r}(s, t) = (s\cos t, s\sin t, t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi$. Den har i punkten $\mathbf{r}(s, t)$ densiteten $s$. Beräkna massan.