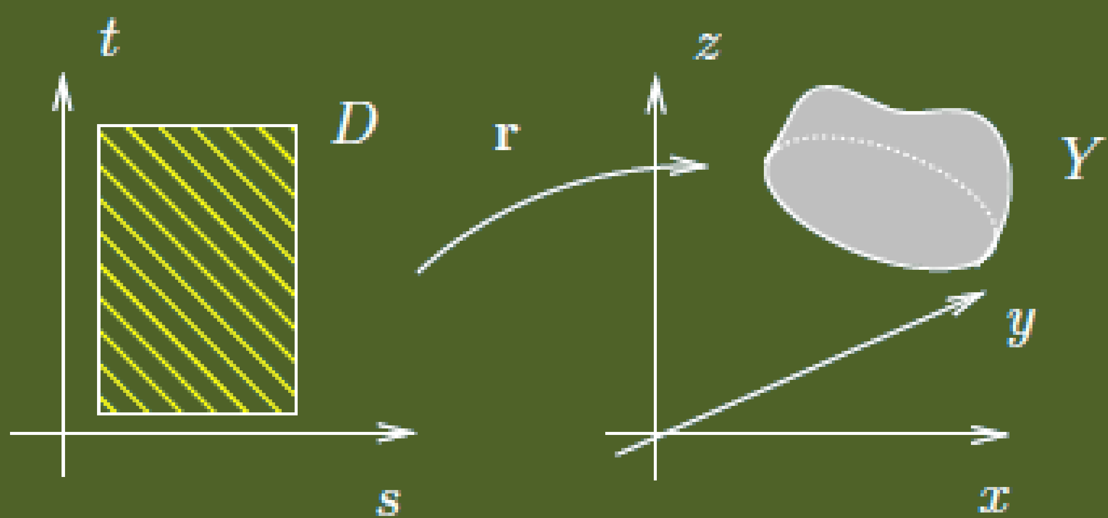
**Ytintegraler, sammanfattning**

För att beräkna en ytintegral: Välj en parametrisering $\mathbf{r}(s,t)$, $(s,t) \in D$ av ytan $Y$. Då är

$$\iint_Y f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(s,t))|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|\,ds\,dt$$




Speciellt har vi att *arean* av ytan $Y$ i rummet ges av

$$\iint_Y dS$$

**Exempel på ytintegraler**

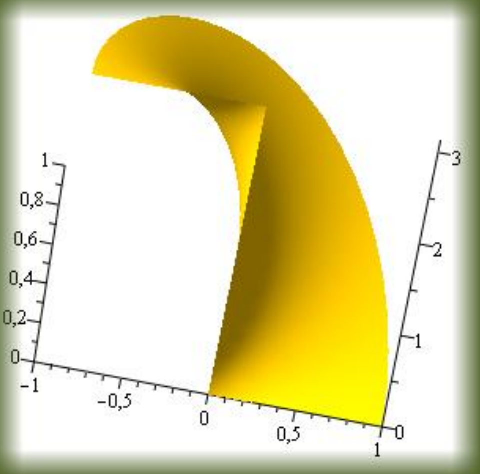
**Ex** Beräkna arean av en sfär med radien $R$

**Ex** Beräkna massan av en halvsfären med radien $R$,medelpunkt i origo och $z \geq 0$, när densiteten i $(x, y, z)$ är $z$ (massa / areaenhet)

**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av ytan som uppstår när grafen till $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar ett varv runt $y$-axeln ($f \geq 0$).

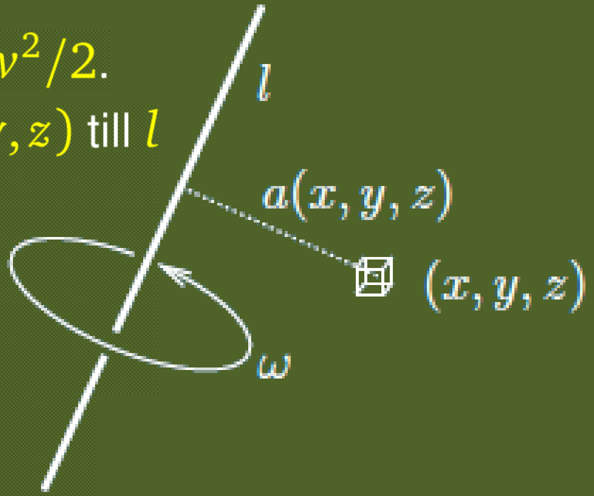
**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av grafen till $f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

**Ex** Ytan $Y$ paramteriseras av $\mathbf{r}(s, t) = (s\cos t, s\sin t, t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi$. Den har i punkten $\mathbf{r}(s, t)$ densiteten $s$. Beräkna massan.



**Tröghetsmoment**

En kropp $K$ roterar runt en axel $l$ med *vinkelhastigheten* $\omega$




En massa som rör sig med farten $v$ har *rörelseenergin* $mv^2/2$.
Ett litet volymelement i kroppen som har avståndet $a(x,y,z)$ till $l$ rör sig med farten $a\omega$ och har då rörelseenergin

$$\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2\,dx\,dy\,dz$$

Kroppen har alltså rörelseenergin

$$\frac{1}{2}\omega^2\iiint_K \rho a^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\omega^2 J$$

där $J$ kallas tröghetsmomentent av $K$ map $l$

**Ex** Cylindern $y^2+z^2 \leq 1$, $|x| \leq 1$ har i punkten $(x,y,z)$ densiteten $1+x^2$.
Beräkna trögehetsmomentet map $z$-axeln.

Tröghetsmomentet för en *yta* $Y$ ges av

$$\iint_Y \rho a^2 \, dS = J$$

där $a$ är avståndet till rotationsaxeln $l$

**Ex** Cylinderytan $x^2 + y^2 = 2$, $|z| \leq 3$ har i punkten $(x, y, z)$ densiteten $1 + z^2$. Beräkna trögehetsmomentet map $z$-axeln.

**Masscentrum**

*Masscentrum* för en kropp är en punkt kring vilken kroppen är i jämvikt med avseende på varje parallellverkande tyngdkraft.

Används för att i fysikaliska sammanhang ersätta en kropp med en punktformig massa.

Koordinaterna för masscentrum $(x_T, y_T, z_T)$ kan beräknas enligt

$$mx_T = \iiint_K x\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

där $K$ är kroppen med densitet $\rho$ och massan $m$ (som är integralen utan $x$). Samma typ av formel för $y_T$, $z_T$.

**Ex** Kroppen $K$ ges av $x^2 + y^2 \le z \le 1$. Den har i $(x, y, z)$ densiteten $z$. Bestäm masscentrum.

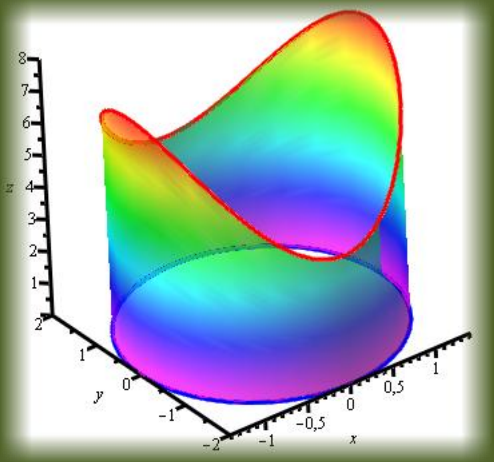
Koordinaterna för en *ytas* masscentrum $(x_T, y_T, z_T)$ kan beräknas enligt

$$mx_T = \iint_Y x\rho(x,y,z)\,dS$$

där $Y$ är ytan med densitet $\rho$ och massan $m$ (som är integralen utan $x$). Samma typ av formel för $y_T$, $z_T$.

**Ex** Ytan $Y$ ges av $x^2 + y^2 = z$, $z \leq 1$. Den har i $(x,y,z)$ densiteten $z$. Bestäm masscentrum.

## Kurvintegraler




En funktion $f$ är definierad i punkterna på en kurva $\gamma$ i planet.

Vi vill kunna beräkna *arean* mellan funktionens graf och kurvan. Betecknas med

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds$$

Area under $x,\ y$-planet räknas som negativ.

Med samma typ av argument som för ytintegraler kan man komma fram till att den kan beräknas genom att man väljer en parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\ a \le t \le b$ av kurvan $\gamma$.

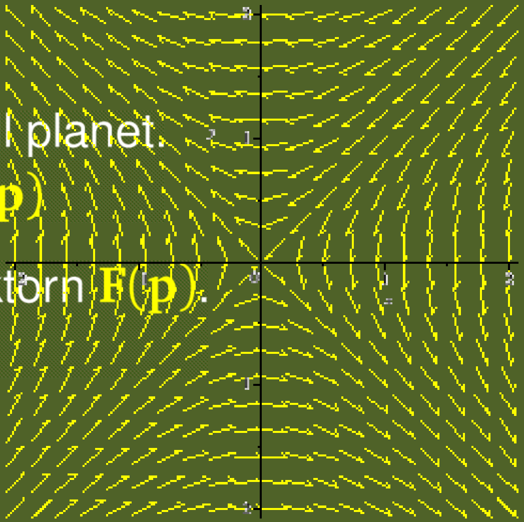
Man får

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Area under $x,\ y$-planet räknas som negativ.

**Ex** Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma xy\,ds$, där kurvan $\gamma$ ges av $4 = 2x^2 + y^2$.

## Vektorfält i planet



Ett vektorfält är en funktion $\mathbf{F}$ från ett öppet område i planet till planet.
Det betyder att vi för varje punkt $\mathbf{p}$ i området har en vektor $\mathbf{F}(\mathbf{p})$

Vi illustrerar vektorfältet genom att i varje punkt $\mathbf{p}$ avsätta vektorn $\mathbf{F}(\mathbf{p})$.
Kan tänka: en kraft i varje punkt.

**Ex** Runt en ledare prallell med $z$-axeln uppstår två vektor fält i $x, y$-planet.
Ett elektrostatiskt $\mathbf{E}$ och ett elektromagnetiskt $\mathbf{B}$.

De ges av

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \mathbf{B} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$