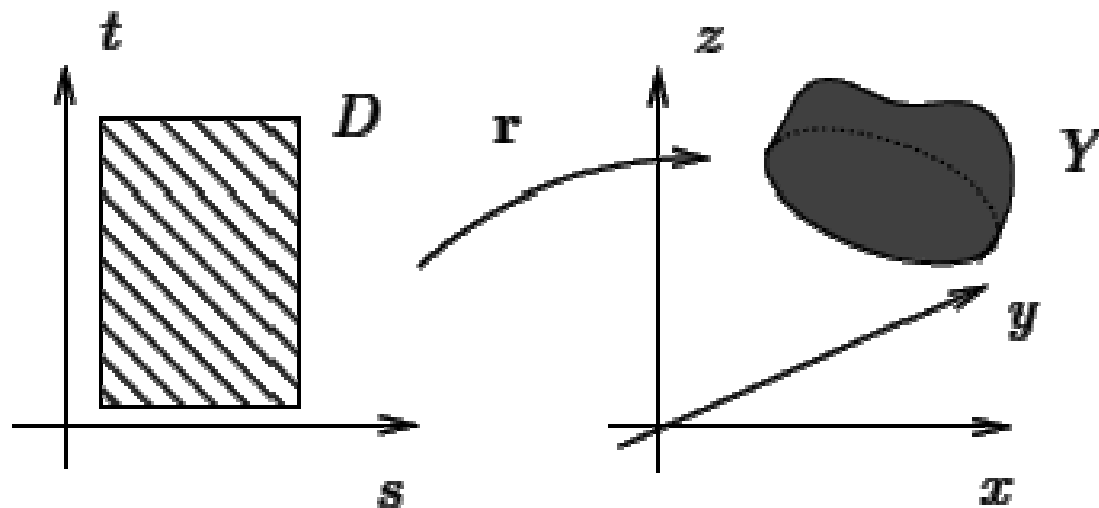


## Ytintegraler, sammanfattning

För att beräkna en ytintegral: Välj en parametrisering  $\mathbf{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in D$  av ytan  $Y$ . Då är

$$\iint_Y f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(s, t)) |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| \, ds \, dt$$



Speciellt har vi att *arean* av ytan  $Y$  i rummet ges av

$$\iint_Y dS$$

## Exempel på ytintegraler

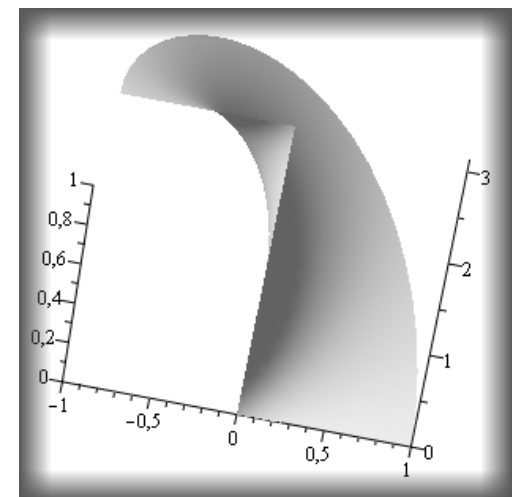
**Ex** Beräkna arean av en sfär med radien  $R$

**Ex** Beräkna massan av en halvsfären med radien  $R$ , medelpunkt i origo och  $z \geq 0$ , när densiteten i  $(x, y, z)$  är  $z$  (massa / areaenhet)

**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av ytan som uppstår när grafen till  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  roterar ett varv runt  $y$ -axeln ( $f \geq 0$ ).

**Ex** Härled en formel för beräkning av arean av grafen till  $f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ .

**Ex** Ytan  $Y$  paramteriseras av  $\mathbf{r}(s, t) = (s \cos t, s \sin t, t)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Den har i punkten  $\mathbf{r}(s, t)$  densiteten  $s$ . Beräkna massan.



## Tröghetsmoment

En kropp  $K$  roterar runt en axel  $l$  med *vinkelhastigheten*  $\omega$

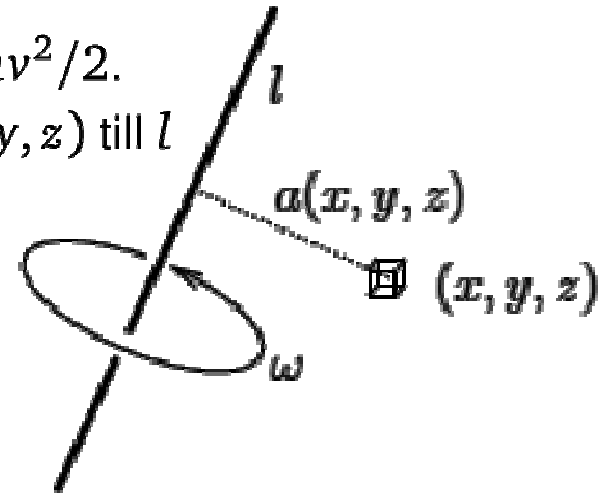
En massa som rör sig med farten  $v$  har *rörelseenergin*  $mv^2/2$ .

Ett litet volymelement i kroppen som har avståndet  $a(x, y, z)$  till  $l$  rör sig med farten  $a\omega$  och har då rörelseenergin

$$\frac{1}{2}\rho(a\omega)^2 dx dy dz$$

Kroppen har alltså rörelseenergin

$$\frac{1}{2}\omega^2 \iiint_K \rho a^2 dx dy dz = \frac{1}{2}\omega^2 J$$



där  $J$  kallas tröghetsmomentet av  $K$  map  $l$

**Ex** Cylindern  $y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $|x| \leq 1$  har i punkten  $(x, y, z)$  densiteten  $1 + x^2$ .  
Beräkna tröghetsmomentet map  $z$ -axeln.

Tröghetsmomentet för en yta  $Y$  ges av

$$\iint_Y \rho a^2 dS = J$$

där  $a$  är avståndet till rotationsaxeln  $l$

**Ex** Cylinderytan  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $|z| \leq 3$  har i punkten  $(x, y, z)$  densiteten  $1 + z^2$ .  
Beräkna tröghetsmomentet map  $z$ -axeln.

## Masscentrum

*Masscentrum* för en kropp är en punkt kring vilken kroppen är i jämvikt med avseende på varje parallellverkande tyngdkraft.

Används för att i fysikaliska sammanhang ersätta en kropp med en punktformig massa.

Koordinaterna för masscentrum  $(x_T, y_T, z_T)$  kan beräknas enligt

$$mx_T = \iiint_K x\rho(x, y, z) dx dy dz$$

där  $K$  är kroppen med densitet  $\rho$  och massan  $m$  (som är integralen utan  $x$ ).  
Samma typ av formel för  $y_T, z_T$ .

**Ex** Kroppen  $K$  ges av  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ . Den har i  $(x, y, z)$  densiteten  $z$ .  
Bestäm masscentrum.

Koordinaterna för en ytas masscentrum  $(x_T, y_T, z_T)$  kan beräknas enligt

$$mx_T = \iint_Y x\rho(x, y, z) dS$$

där  $Y$  är ytan med densitet  $\rho$  och massan  $m$  (som är integralen utan  $x$ ).  
Samma typ av formel för  $y_T, z_T$ .

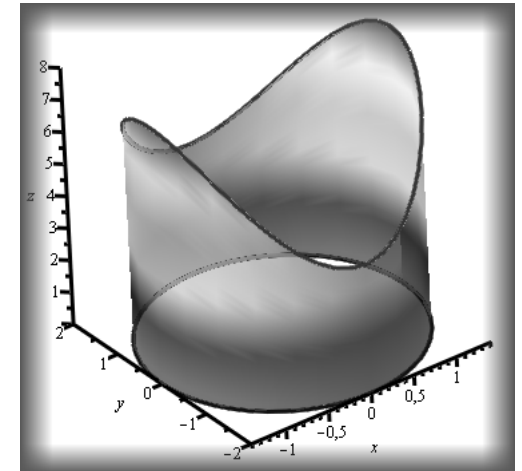
**Ex** Ytan  $Y$  ges av  $x^2 + y^2 = z, z \leq 1$ . Den har i  $(x, y, z)$  densiteten  $z$ .  
Bestäm masscentrum.

## Kurvintegraler

En funktion  $f$  är definierad i punkterna på en kurva  $\gamma$  i planet. Vi vill kunna beräkna *arean* mellan funktionens graf och kurvan. Betecknas med

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds$$

Area under  $x, y$ -planet räknas som negativ.



Med samma typ av argument som för ytintegraler kan man komma fram till att den kan beräknas genom att man väljer en parametrisering  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$   $a \leq t \leq b$  av kurvan  $\gamma$ .

Man får

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Area under  $x, y$ -planet räknas som negativ.

**Ex** Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} xy ds$ , där kurvan  $\gamma$  ges av  $4 = 2x^2 + y^2$ .

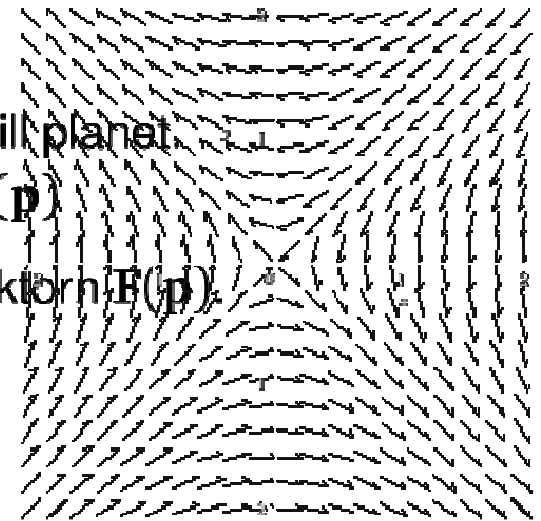
## Vektorfält i planet

Ett vektorfält är en funktion  $\mathbf{F}$  från ett öppet område i planet till planet.

Det betyder att vi för varje punkt  $\mathbf{p}$  i området har en vektor  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ .

Vi illustrerar vektorfältet genom att i varje punkt  $\mathbf{p}$  avsätta vektorn  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ .

Kan tänka: en kraft i varje punkt.



**Ex** Runt en ledare parallell med  $z$ -axeln uppstår två vektorfält i  $x, y$ -planet.  
Ett elektrostatiskt  $\mathbf{E}$  och ett elektromagnetiskt  $\mathbf{B}$ .

De ges av

$$\mathbf{E} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad \mathbf{B} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

