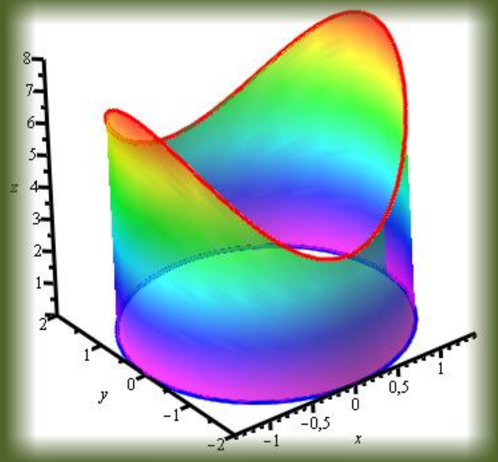
Kurvintegraler (repetition)

En funktion f är definierad i punkterna på en kurva γ i planet.



Vi vill kunna beräkna *arean* mellan funktionens graf och kurvan. Betecknas med

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds$$

Area under $x,\ y$-planet räknas som negativ.

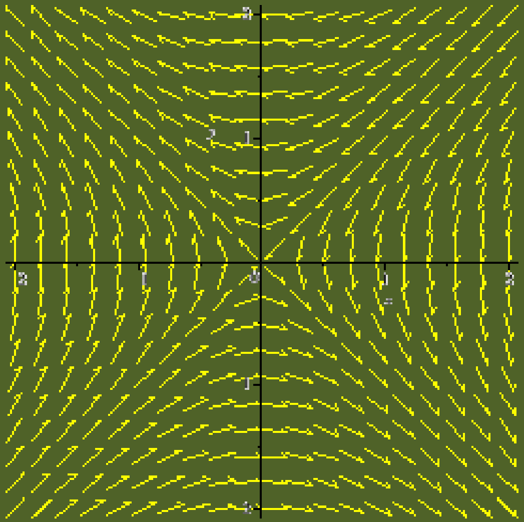
Välj en parametrisering
$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\ a \le t \le b$ av kurvan γ.

Man får

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Area under $x,\ y$-planet räknas som negativ.

Vektorfält i planet

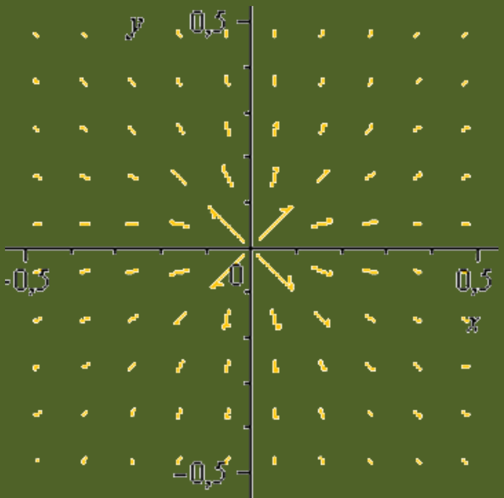


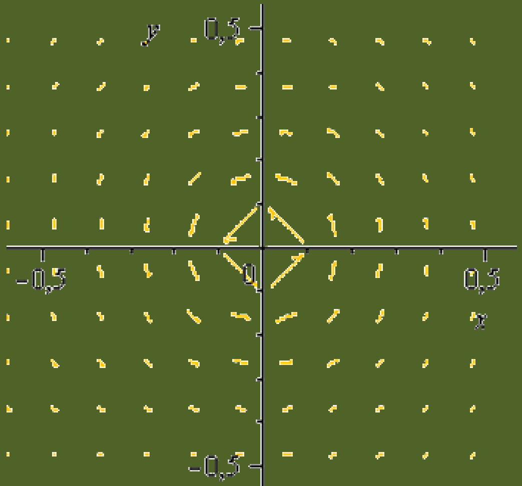
Ett vektorfält är en funktion $\mathbf{F}$ från ett öppet område i planet till planet. Det betyder att vi för varje punkt $\mathbf{p}$ i området har en vektor $\mathbf{F}(\mathbf{p})$

Ex Runt en ledare prallell med z-axeln uppstår två vektor fält i x, y-planet. Ett elektrostatiskt $\mathbf{E}$ och ett elektromagnetiskt $\mathbf{B}$.

De ges av

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad \mathbf{B} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

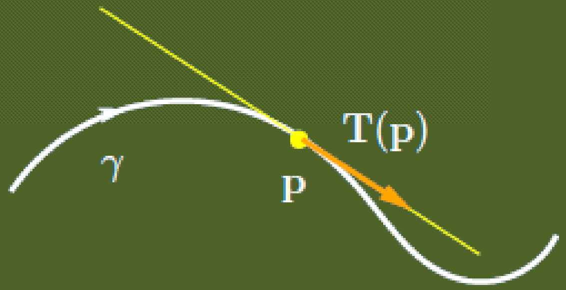




Kurvintegraler och vektorfält

Att *orientera* en kurva i planet är det samma som att välja en genomloppsriktning.

När en orientering är given kan vi definiera tangetvektorfältet $\mathbf{T}$ längs kurvan. I punkten $\mathbf{p}$ är $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ enhetsvektorn längs tangentlinjen i genomloppsrikningen.



Om vi byter orientering på kurvan byter $\mathbf{T}$ riktning.

Om en parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ är given har vi

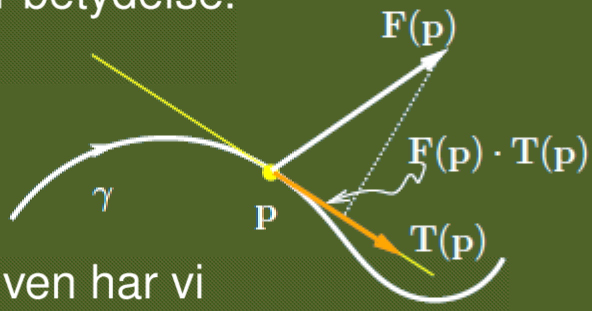
$$\mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

om genomloppsriktningen av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ är den givna orienteringen.

Kurvintegraler och vektorfält (forts.)

Antag att vi har ett vektorfält $\mathbf{F}$ definierat i ett område som innehåller kurvan.
Tänkt på $\mathbf{F}$ som ett kraftfält.
Vill veta vilket *arbete* som utförs vid en förflyttning längs kurvan *i föreskriven riktning*.

Bara storlekten på den del av $\mathbf{F}$ som pekar i $\mathbf{T}$:s riktning har betydelse.
Den ges av $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$



Arbetet ges då av $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$

Om en parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), a \le t \le b$ är given har vi

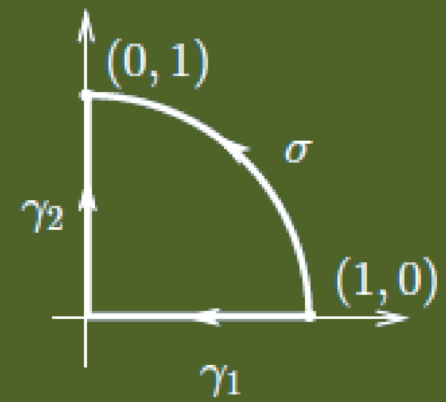
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Om vidare $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ har vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_a^b (P(x,y),Q(x,y))\cdot(x',y')\,dt =$$

$$= \int_a^b \Big(P(x,y)x' + Q(x,y)y'\Big)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Kurvintegraler och vektorfält, exempel



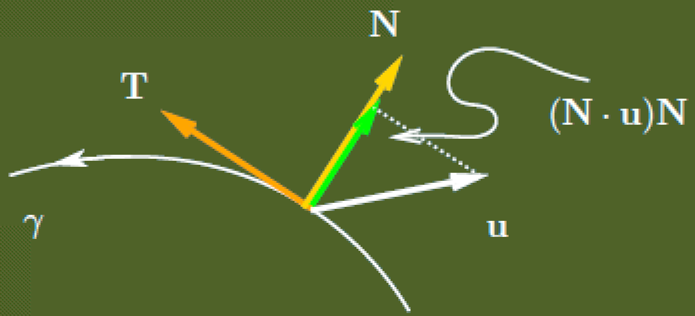
Ex Beräkna kurvintegralen av differentialformen $xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$ över kurvorna σ och $\gamma_1 + \gamma_2$ i figuren.

Ex Beräkna kurvintegralerna av det elektrostatiska fältet $\mathbf{E}$ och det elektromagnetiska fältet $\mathbf{B}$ längs en positivt orienterad cirkel med radie $R \geq 0$ och medelpunkt i origo.

Kurvintegraler och flödesfält

Vi tänker på ett vektorfält som ett flöde:
vektorn i en punkt i planet anger flödets hastighet där.

Vill veta hur mycket som flödar genom ett kurvstycke per tidsenhet.
Måste välja en riktning: en *normal* till kurvan.



Låter kurvans genomloppsriktning avgöra :
välj normalen så att den pekar åt höger

Om $\mathbf{u}$ betecknar flödet så ges då
flödet genom kurvan av

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,ds$$

Om $\mathbf{N} = (A, B)$, så är $\mathbf{T} = (-B, A)$.
Om $\mathbf{u} = (P, Q)$ så är $(P, Q)\cdot\mathbf{N} = (-Q, P)\cdot\mathbf{T}$
och vi har

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_\gamma -Q\,dx + P\,dy$$

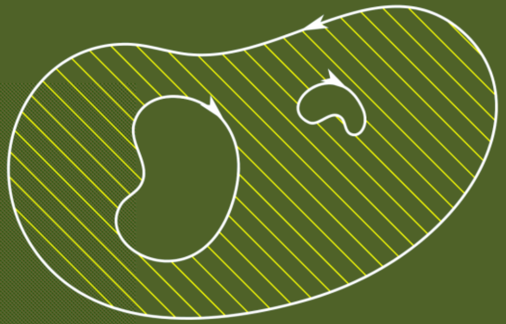
Ex Beräkna flödet av $\mathbf{u} = (xy, y^2)$
genom kurvan som går från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$ längs övre delen av enhetscirkeln.

Greens formel

Ger ett samband mellan vissa kurvintegraler och dubbelintegraler.

Egenskaper en kurva i planet kan ha: *sluten*, *enkel*

Om ett område i planet har en rand som består av slutna enkla kurvor, orienteras de *positivt*:
så att området ligger till *vänster* i genomloppsriktningen.



Sats 9.1 Antag at D är ett kompakt område i planet som har en rand ∂D som består av positivt orienterade $\mathscr{C}^1$-kurvor.
Antag vidare att P och Q
är $\mathscr{C}^1$-funktioner i en öppen mängd som innehåller D. Då gäller

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (-P'_y + Q'_x)\,dx\,dy$$

Ex Beräkna $\int_\gamma (y+e^x)\,dx + (x+\sin(y^4))\,dy$ där γ är kurvan längs övre delen av enhetscirkeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$

Potentialer

En *potential* till ett vektorfält F är en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$ i ett öppet område Ω. De flesta vektorfält *saknar* potential.

Ex Har E en potential? Har $(x^2 + y, xy)$ det?

Ett vektorfält som har en potential kallas *konservativt*.

Sats 9.2 Om U är en potential till $\mathbf{F} = (P, Q)$ i Ω så gäller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$$

där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är γ:s start- resp slutpunkter

Ex Vektorfältet $\mathbf{B}$ har ingen potential i planet minus origo. Det har en potential i området där $x \neq 0$