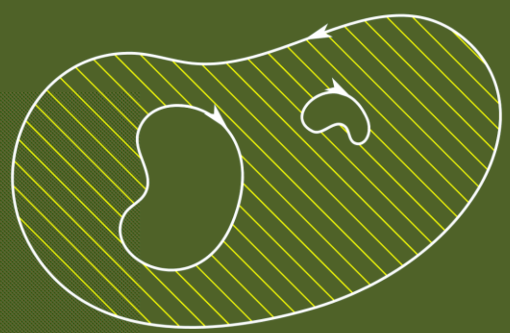
Greens formel

Ger ett samband mellan vissa kurvintegraler och dubbelintegraler.

Egenskaper en kurva i planet kan ha: *sluten*, *enkel*

Om ett område i planet har en rand som består av slutna enkla kurvor, orienteras de *positivt*:
så att området ligger till *vänster* i genomloppsriktningen.



Sats 9.1 Antag at D är ett kompakt område i planet som har en rand ∂D som består av positivt orienterade $\mathscr{C}^1$-kurvor.
Antag vidare att P och Q
är $\mathscr{C}^1$-funktioner i en öppen mängd som innehåller D. Då gäller

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (-P'_y + Q'_x)\,dx\,dy$$

Potentialer

En *potential* till ett vektorfält $\mathbf{F}$ är en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$ i ett öppet område Ω. De flesta vektorfält *saknar* potential.

Ex Har $\mathbf{E}$ en potential? Har $(x^2 + y, xy)$ det?

Ett vektorfält som har en potential kallas *konservativt*.

Sats 9.2 Om U är en potential till $\mathbf{F} = (P, Q)$ i Ω så gäller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$$

där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är γ:s start- resp slutpunkter

Ex Vektorfältet $\mathbf{B}$ har ingen potential i planet minus origo.
Det har en potential i området där $x \neq 0$

Sats 9.3 Antag:
(a) vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är kontinuerligt i ett öppet sammanhängade området
(b) kurvintegraler av det är oberoende av vägval mellan start- och slutpunkt.
Då har vektorfältet en potential i området.

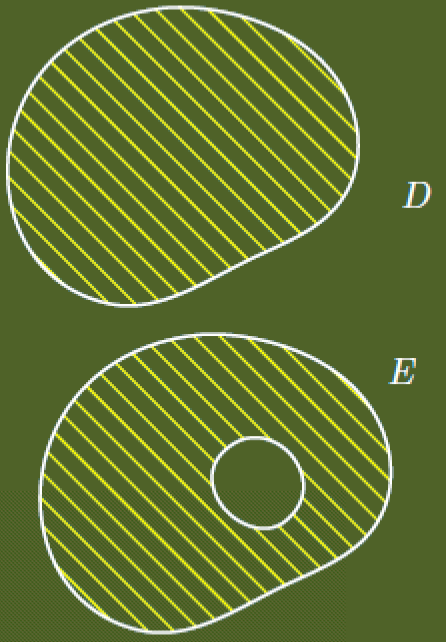
Sats 9.4 Om vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potential (som är $\mathscr{C}^2$) så gäller

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ex Vektorfältet $\mathbf{B}$ har ingen potential i planet minus origo.
Ändå gäller

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Villkoret är *nödvändigt men inte tillräckligt*.



Ett område i planet är enkelt sammanhängande om det är sammanhängande och saknar “hål”.

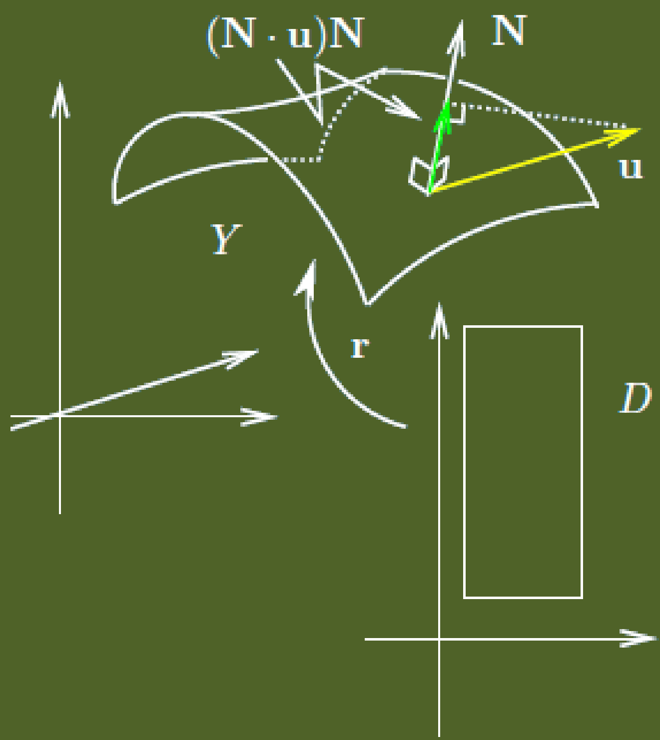
Sats 9.5 Om vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

i ett öppet *enkelt sammanhängade* område Ω i planet så har $\mathbf{F}$ en potential där.

Ytintegraler och vektorfält

Vi har ett vektor fält $\mathbf{u}$ och en yta Y i rummet.
Vill veta flödet genom ytan.



Ges av *flödesintegralen*

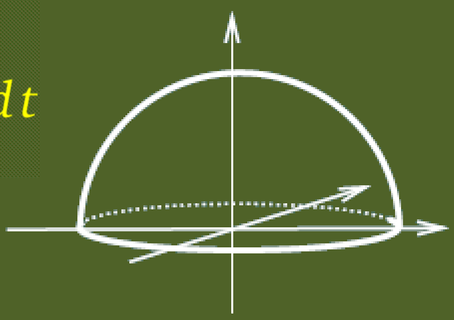
$$\iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS$$

där $\mathbf{N}$ är en *normal* till ytan.
Tecknet beror på val av normal (orientering av ytan).

En parametrisering $\mathbf{r}(s,t)$ ger en normal:
$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t / |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|$

Vi får då

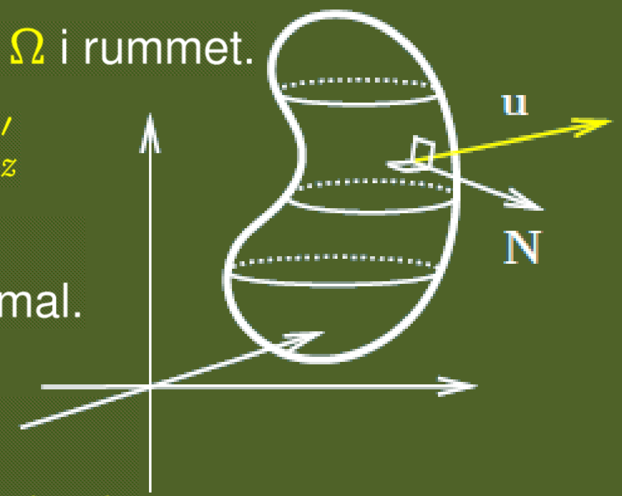
$$\iint_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \mathbf{u}\cdot(\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t)\,ds\,dt$$



Ex Beräkna flödet av $\mathbf{u} = (z, z, xy)$ genom övre halvan av enhetssfären.
om riktningen “uppåt” är positiv.

Gauss sats

Ett vektorfält $\mathbf{u} = (P, Q, R)$ är definierat i ett öppet område Ω i rummet.



Divergensen av det definieras då av $\operatorname{div}\mathbf{u} = P'_x + Q'_y + R'_z$

Ett kompakt område K ligger i Ω .
Det har en rand som är en yta ∂K som ges utåtriktad normal.

Då gäller

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{u}\, dx\, dy\, dz$$

Integralen mätet flödet ut genom ytan på kroppen.

Divergensen $\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{p})$ är ett mått på produktionen av det strömmande mediet i punkten $\mathbf{p}$.

Ex Beräkna flödet av $\mathbf{u} = (yz^3, z^4x, z + xy)$ genom ytan som ges av $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$. Riktning med negativ z-koordinat räknas positiv.

Stokes sats

Ett vektorfält $\mathbf{u} = (P, Q, R)$ är definierat i ett öppet område Ω i rummet.

Rotationen av det definieras då av

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{ccc} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{array} \right\}$$

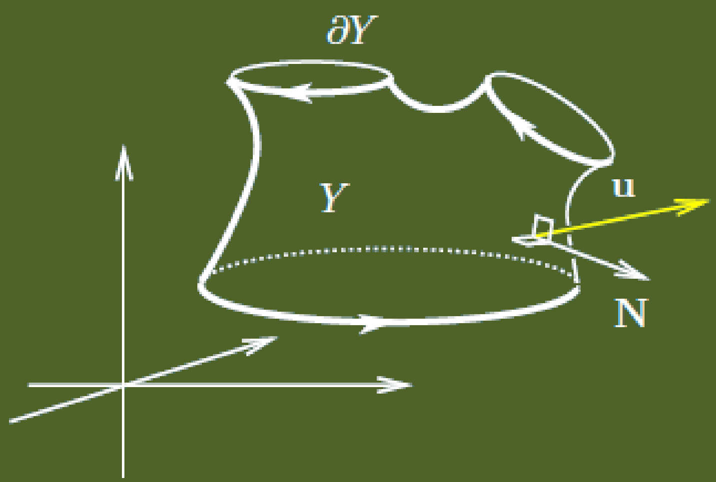
Observera att $\operatorname{rot}(P, Q, R)$ är ett nytt *vektorfält*.

Ex Beräkna rotationen av vektorfältet $(xy + z, y^2 + xz, x + y)$

En yta Y i området Ω har en rand ∂Y som är en (eller flera) kurvor.

Då gäller

$$\int_{\partial Y} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$



Ex Beräkna arbetet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (e^{\sin x} - y, \arctan y + x, \sin z)$$

längs kurvan γ som ges av $z = 4 - y^2$, $z = x^2 + y^2$
genomlöpt moturs sett från positiva z-axeln.