Funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$

En *funktion* **f** från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ är en regel som till (vissa) punkter **x** i $\mathbf{R}^n$ ordnar precis en punkt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\dots,f_m(\mathbf{x}))$ i $\mathbf{R}^m$. Funktionerna $f_i(\mathbf{x})$ är **f**:s *koordinatfunktioner*.
De punkter **x** som **f** ska användas på är tillsammans **f**:s *definitionsmängd*.

Ex Formeln $\mathbf{f}(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$ definierar en funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$.

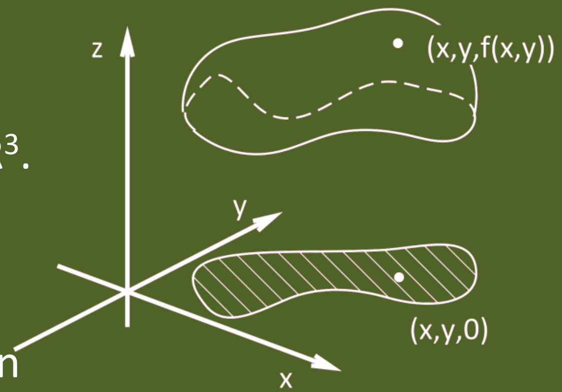
Om inget annat anges är defintionsmängden den största mängde av punkter där **f** kan användas.

Ex Formeln $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1/(|\mathbf{x}|^2\text{-}1)$ bestämmer en funktion med definitionsmängd som består av alla punkter **x** utom de med avstånd 1 till origo.

Ex Formeln $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1/(|\mathbf{x}|^2\text{-}1)$, där $|\mathbf{x}|< 1$, bestämmer en funktion med definitionsmängd som består av alla punkter **x** med avstånd mindre än 1 till origo.

Funktioner från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}$ (reellvärd funktion av två variabler)

Ex $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$



Till en sådan funktion kan man rita dess *graf* i $\mathbf{R}^3$.

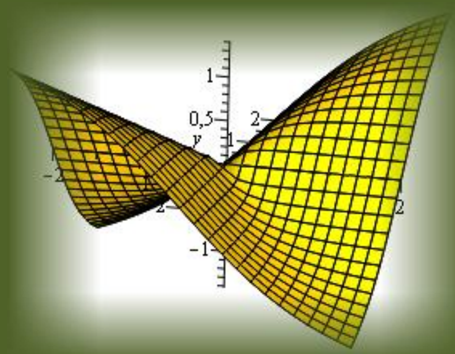
Består av alla punkter $(x,y,f(x,y))$, där (x,y) ligger i definitionsmängden.

Kan vara ganska komplicerat att förstå hur grafen ser ut även om formeln för f är enkel.

Ex (En del av) grafen till

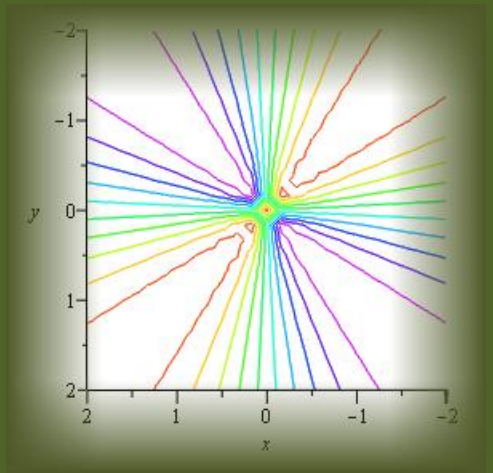
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ser ut så här:



Man kan ha nytta av att rita kurvorna $f(x,y) = k$ (i planet), för olika värden på kontanten k . Sådan kurvor kallas *nivåkurvor* till f . På väderkartor kallas nivåkurvor för lufttrycket för isobarer.

Ex Funktionen $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ har nivå kurvor $xy = k(x^2+y^2)$ för olika värden på k .



Funktioner från R^3 till R

Ex $f(x,y,z) = x^2 - 2yz + z^2$

Kan inte rita grafer till sådan funktioner.

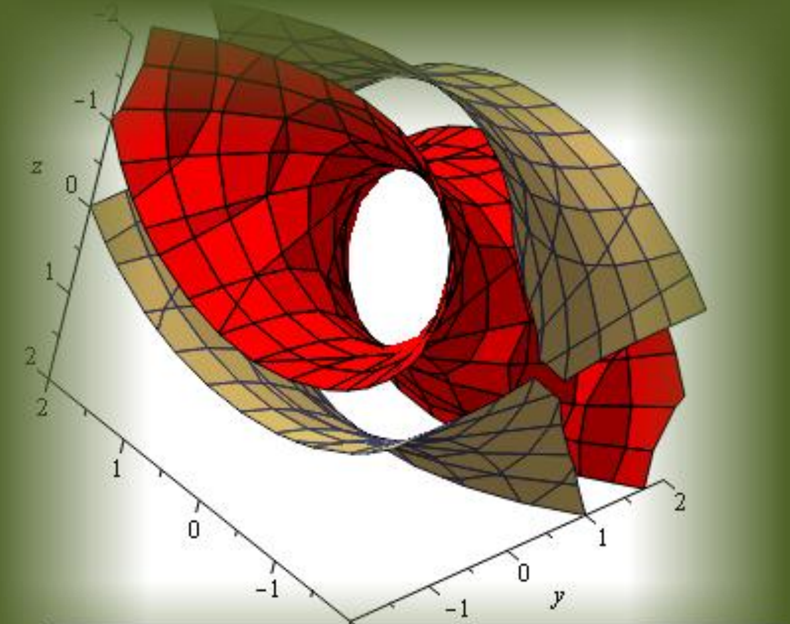
Ett sätt att få en uppfattning om dem är att rita *nivåytorna* $f(x,y,z) = k$, för olika värden på konstanten k .

Ex Två nivåytor till $f(x,y,z) = x^2 - 2yz + z^2$ visas i figuren:

De kan vara extremt komplicerade att förstå.

Grafen till funktionen $f(x,y)$ är nivåytan

$F(x,y,z) = 0$, om vi sätter $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

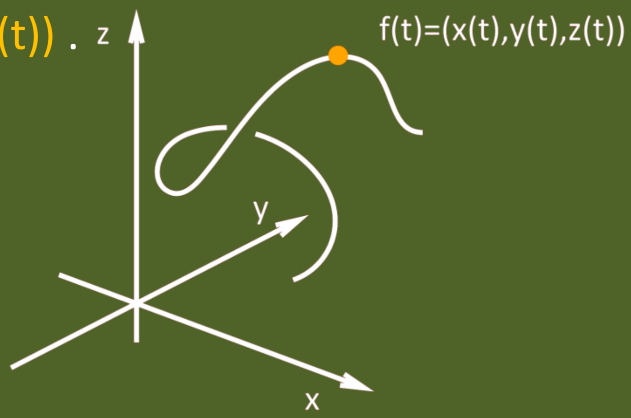


$x^2 - 2\cdot y\cdot z + z^2 = 1, x^2 - 2\cdot y\cdot z + z^2 = 4$

Funktioner från R till $\mathbf{R}^n$ (kurvor)

Ex $f(t) = (t, t^2-1, t^2+1)$ är en kurva i rummet.

Man kan tänka sig att en sådan funktion beskriver en partikels färd i rummet: vid tidpunkten t befinner den sig i punkten $f(t) = (x(t),y(t),z(t))$. Mängden av punkter som partikeln passerar kallas kurvans *spår*, och **f** är en *parametrisering* av spåret (som ofta också kallas kurva).



Ex $f(t) = (\cos(t),\sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ är en parametrisering av enhetscirkeln.

Ex $f(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$ är en parametrisering av skruvlinjen.

Ett spår har flera parametriseringar: **f** anger inte bara vilka punkter partikeln passerar utan också hur snabbt den rör sig.

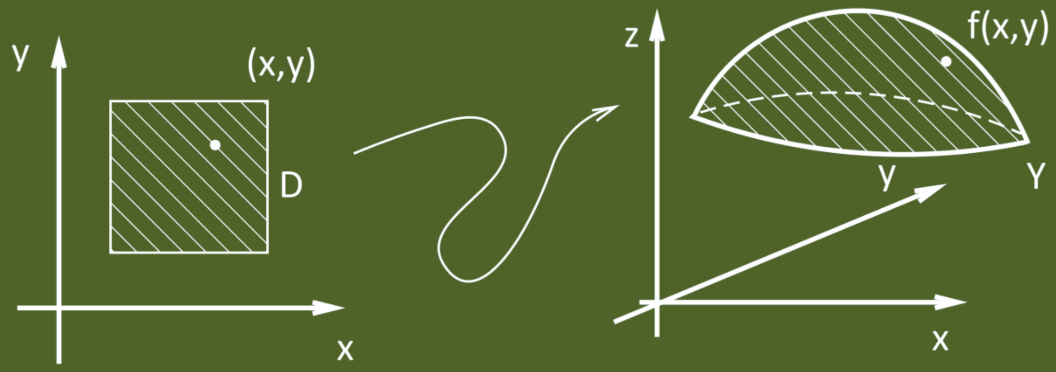
Ex $f(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ parametriserar ellipsen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Ex $f(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$, $-\infty < t < \infty$ parmetriserar hyperbeln $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$.

Ytor i rummet

En parametrisering av en yta i rummet är en funktion

$\mathbf{f}(x,y) = (f1(x,y),f2(x,y),f3(x,y))$, där (x,y) ligger i en delmängd D till $\mathbf{R}^2$.



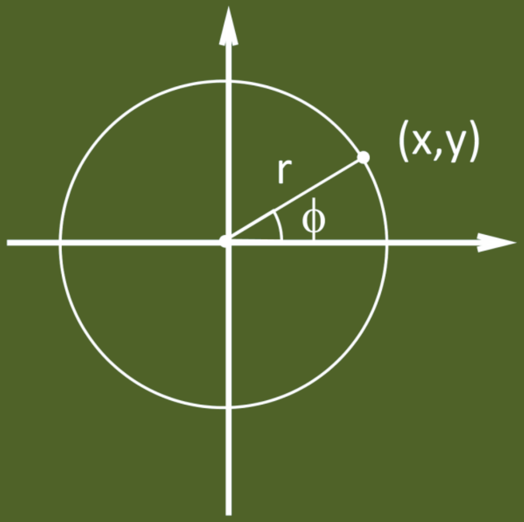
Ex (Parametrisering av en sfär) Funktionen

$\mathbf{f}(s,t) = (\cos(s)\sin(t),\sin(s)\sin(t),\cos(t))$, där $0 \leq s \leq 2\pi$ och $0 \leq t \leq \pi$

är en parametrisering av enhetssfären.

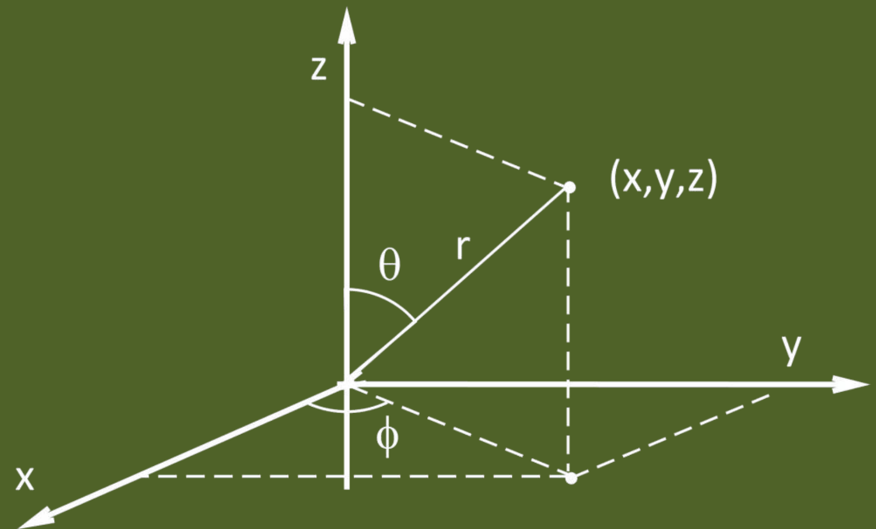
Funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$ (koordinat byten)

Polära koordinater: (r, ϕ) av bildas på $(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, $0 \le r$, $0 \le \phi \le 2\pi$.



Sfäriska koordinater: (r, θ, ϕ) avbildas på

$(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$, $0 \le r$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$



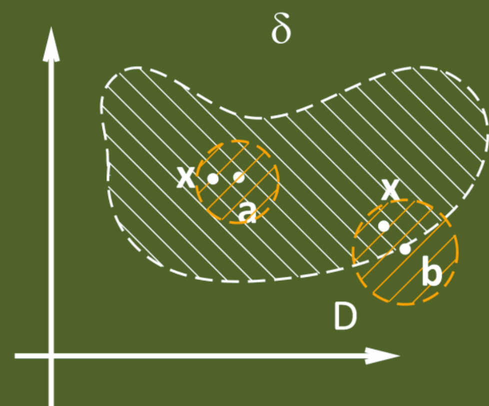
Gränsvärden av funktioner från R^n till R^m

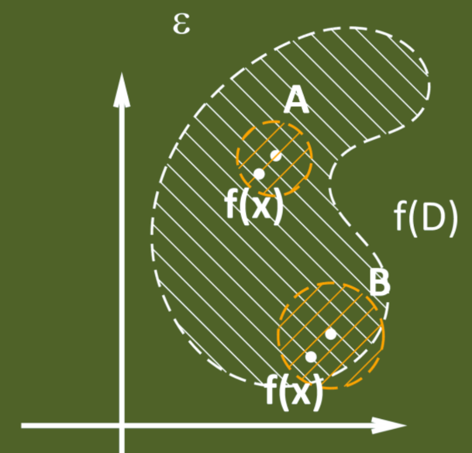
Antag att funktionen **f** har defintionsmängden **D** och att **a** är en randpunkt eller en inre punkt till **D** .

Funktionen har då *gränsvärdet* **A** när **x** går mot **a** , om det för varje för varje positivt ε finns ett positivt δ så att

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta \text{ och } \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{D} \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{A}| < \varepsilon .$$

Intuitivt: vi kan få funktions värde att hamna godtyckligt nära **A** bara vi väljer **x** tillräckligt nära **a** .





Detta skrivs $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Man skulle också kunna skriva

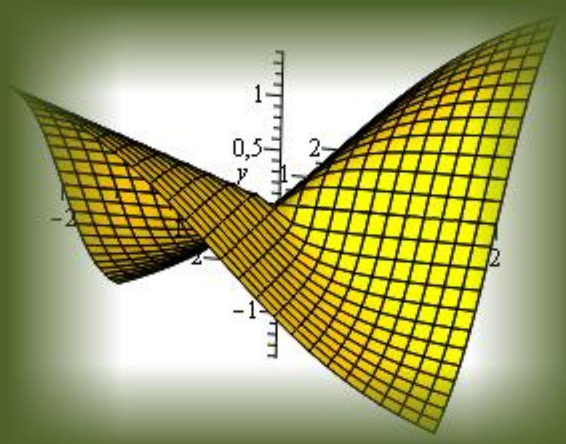
$$\lim_{|x-a|\to 0} |f(x)-A| = 0$$

Som är ett påstående i en variabel.

Det betyder att de allmänna räknereglerna för gränsvärden från envariabelanalysen gäller också i flervariabelanalys.

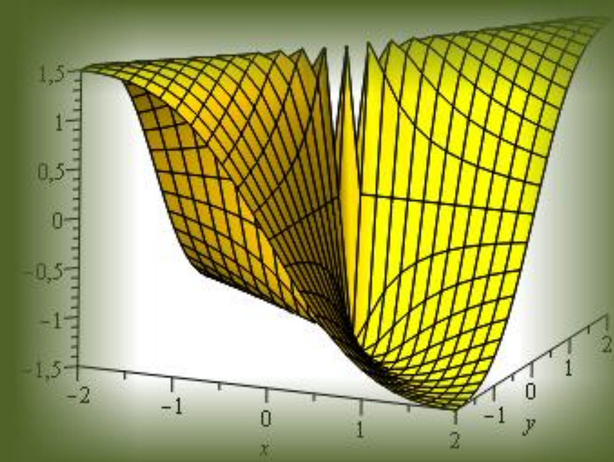
Ex

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

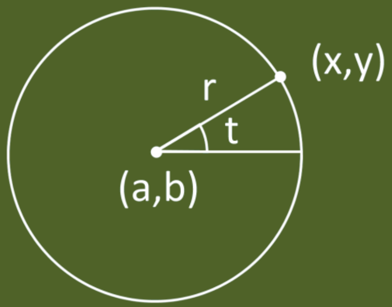


Ex

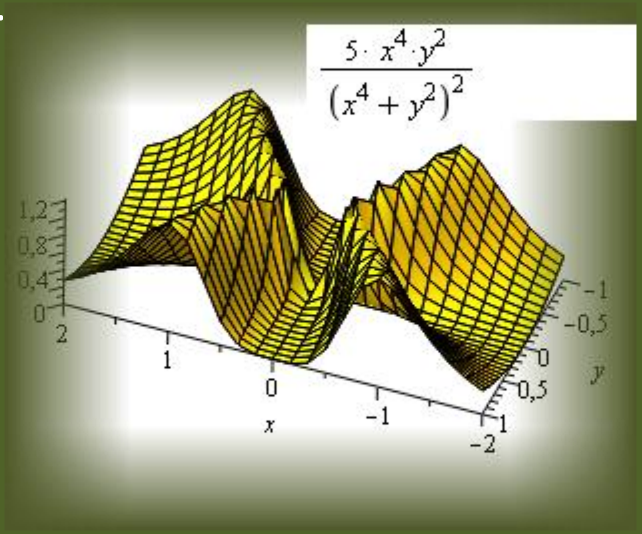
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{existerar inte.}$$



Man har ofta nytta av polära koordinater. Antag att (x,y) ska närma sig (a,b). Om vi skriver $(x,y) = (a + r\cos(t), b + r\sin(t))$, så betyder det att r ska närma sig 0.



Ett sätt att gissa en funktions gränsvärde när variabeln **x** närmar sig **a** är att låta **x** närma sig **a** längs räta linjer. Men detta räcker inte för att visa att en funktion har ett visst gränsvärde. Om man däremot får olika gränsvärden längs olika linjer in mot **a** kan man vara säker på att gränsvärdet inte finns.



Ex (Varnande)

$$f(x) = \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$ saknar gränsvärde

när (x,y) går mot $(0,0)$. Men har gränsvärdet 0 längs varje linje in mot origo.

Koordinatprincipen

Funktionen $\mathbf{f(x)} = (f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$ har gränsvärdet $\mathbf{A}$ när $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$ precis

när $f_i(x)$ har gränsvärdet A_i , för varje i , $1 \le i \le n$.