

Funktioner från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^m

En *funktion* \mathbf{f} från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^m är en regel som till (vissa) punkter \mathbf{x} i \mathbf{R}^n ordnar precis en punkt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ i \mathbf{R}^m . Funktionerna $f_i(\mathbf{x})$ är \mathbf{f} :s *koordinatfunktioner*.

De punkter \mathbf{x} som \mathbf{f} ska användas på är tillsammans \mathbf{f} :s *definitionsområde*.

Ex Formeln $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ definierar en funktion från \mathbf{R}^2 till \mathbf{R}^2 .

Om inget annat anges är definitionsområdet den största mängd av punkter där \mathbf{f} kan användas.

Ex Formeln $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1/(|\mathbf{x}|^2 - 1)$ bestämmer en funktion med definitionsområde som består av alla punkter \mathbf{x} utom de med avstånd 1 till origo.

Ex Formeln $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 1/(|\mathbf{x}|^2 - 1)$, där $|\mathbf{x}| < 1$, bestämmer en funktion med definitionsområde som består av alla punkter \mathbf{x} med avstånd mindre än 1 till origo.

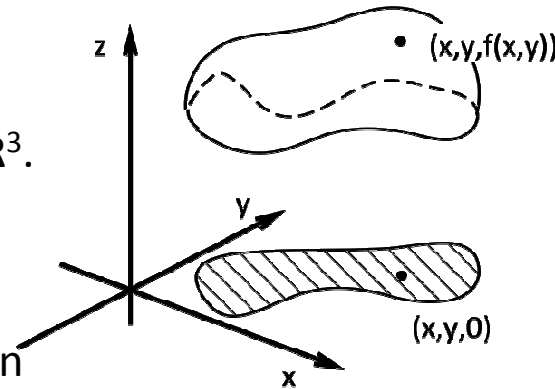
Funktioner från \mathbf{R}^2 till \mathbf{R} (reellvärd funktion av två variabler)

Ex $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Till en sådan funktion kan man rita dess *graf* i \mathbf{R}^3 .

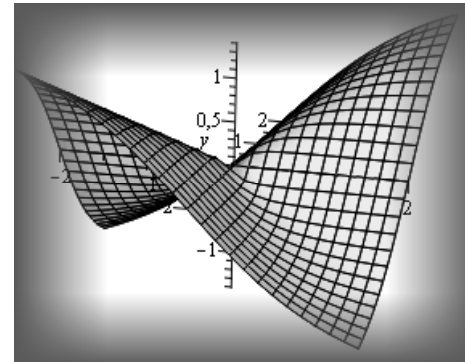
Består av alla punkter $(x,y,f(x,y))$, där (x,y) ligger i definitionsmängden.

Kan vara ganska komplicerat att förstå hur grafen ser ut även om formeln för f är enkel.



Ex (En del av) grafen till

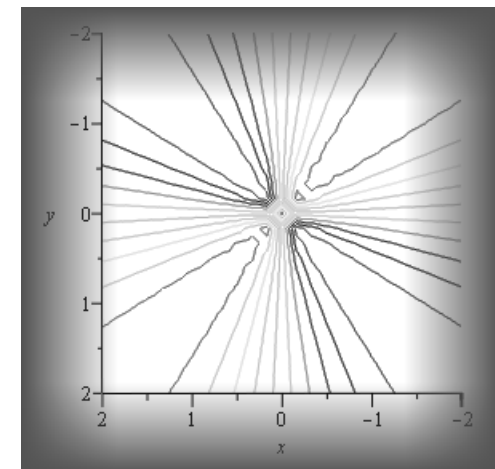
$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ser ut så här:



Man kan ha nytta av att rita kurvorna $f(x,y) = k$

(i planet), för olika värden på konstanten k . Sådana kurvor kallas *nivåkurvor* till f . På väderkartor kallas nivåkurvor för lufttrycket för isobarer.

Ex Funktionen $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ har nivåkurvor $xy = k(x^2 + y^2)$ för olika värden på k .



Funktioner från \mathbb{R}^3 till \mathbb{R}

Ex $f(x,y,z) = x^2 - 2yz + z^2$

Kan inte rita grafer till sådan funktioner.

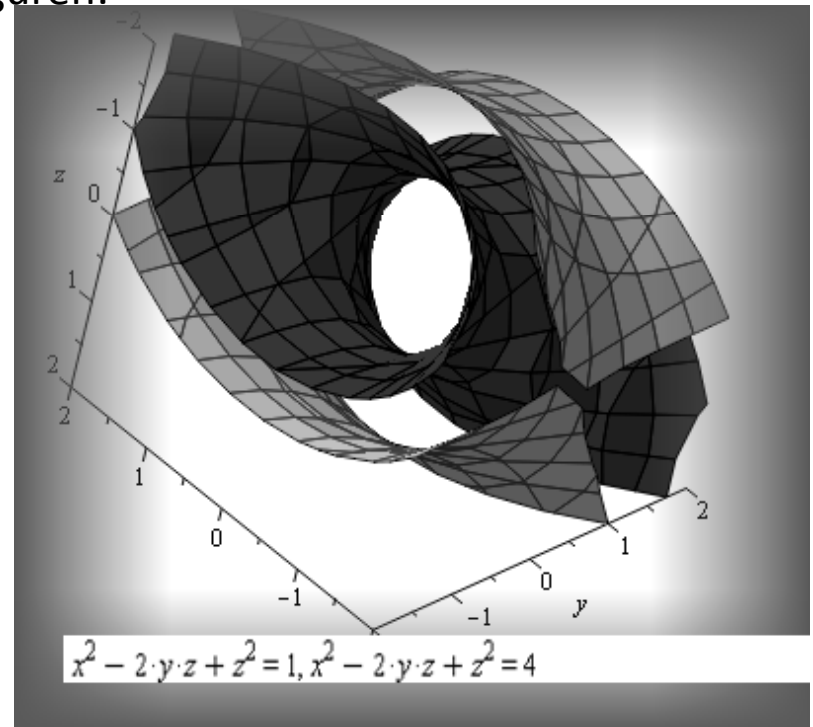
Ett sätt att få en uppfattning om dem är att rita *nivåytorna* $f(x,y,z) = k$, för olika värden på konstanten k .

Ex Två nivåytor till $f(x,y,z) = x^2 - 2yz + z^2$ visas i figuren:

De kan vara extremt komplicerade att förstå.

Grafen till funktionen $f(x,y)$ är nivåytan

$F(x,y,z) = 0$, om vi sätter $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.



Funktioner från \mathbb{R} till \mathbb{R}^n (kurvor)

Ex $f(t) = (t, t^2-1, t^2+1)$ är en kurva i rummet.

Man kan tänka sig att en sådan funktion beskriver en partikels färd i rummet: vid tidpunkten t befinner den sig i punkten $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Mängden av punkter som partikeln passerar kallas kurvans *spår*, och f är en *parametrisering* av spåret (som ofta också kallas kurva).

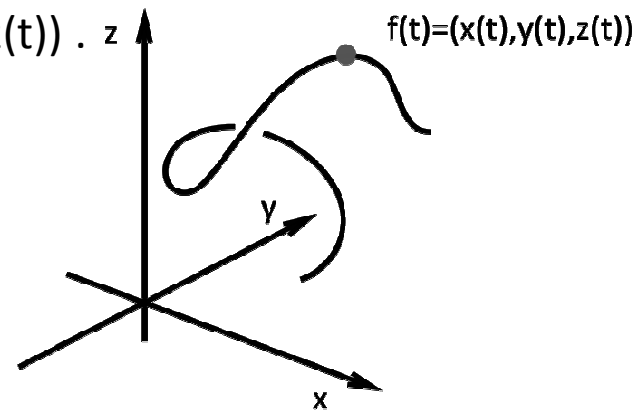
Ex $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ är en parametrisering av enhetscirkeln.

Ex $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ är en parametrisering av skruvlinjen.

Ett spår har flera parametriseringar: f anger inte bara vilka punkter partikeln passerar utan också hur snabbt den rör sig.

Ex $f(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ parametriserar ellipsen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

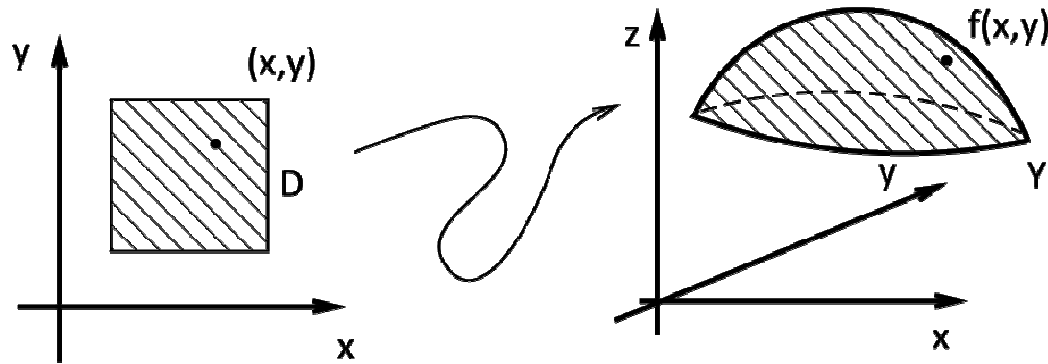
Ex $f(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t))$, $-\infty < t < \infty$ parametriserar hyperbeln $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$.



Ytor i rummet

En parametrisering av en yta i rummet är en funktion

$\mathbf{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$, där (x,y) ligger i en delmängd D till \mathbf{R}^2 .



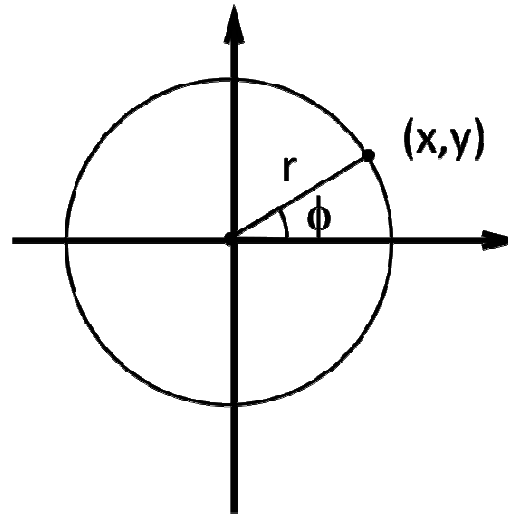
Ex (Parametrisering av en sfär) Funktionen

$\mathbf{f}(s,t) = (\cos(s)\sin(t), \sin(s)\sin(t), \cos(t))$, där $0 \leq s \leq 2\pi$ och $0 \leq t \leq \pi$

är en parametrisering av enhetssfären.

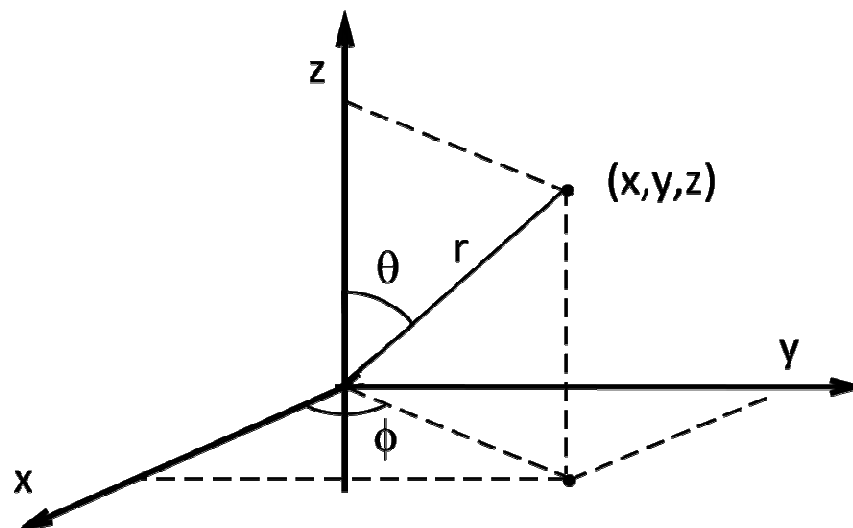
Funktioner från \mathbf{R}^n till \mathbf{R}^n (koordinat byten)

Polära koordinater: (r, ϕ) av bildas på $(r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, $0 \leq r, 0 \leq \phi \leq 2\pi$.



Sfäriska koordinater: (r, θ, ϕ) avbildas på

$(r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta))$, $0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$



Gränsvärden av funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m

Antag att funktionen f har definitionsmängden D och att a är en randpunkt eller en inre punkt till D .

Funktionen har då *gränsvärdet* A när x går mot a , om det för varje för varje positivt ε finns ett positivt δ så att

$$|x - a| < \delta \text{ och } x \text{ i } D \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Intuitivt: vi kan få funktions värde att hamna godtyckligt nära A bara vi väljer x tillräckligt nära a .

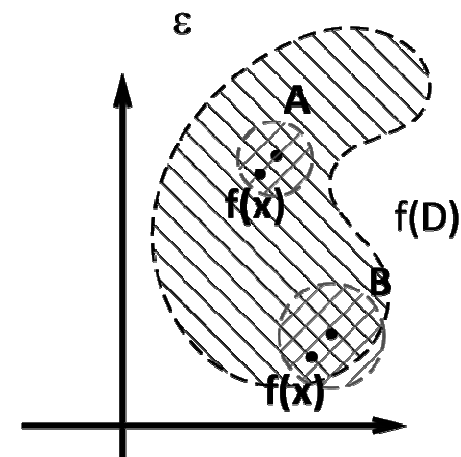
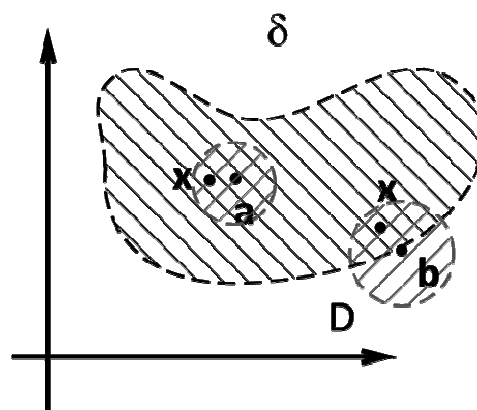
Detta skrivs $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Man skulle också kunna skriva

$$\lim_{|x-a| \rightarrow 0} |f(x) - A| = 0$$

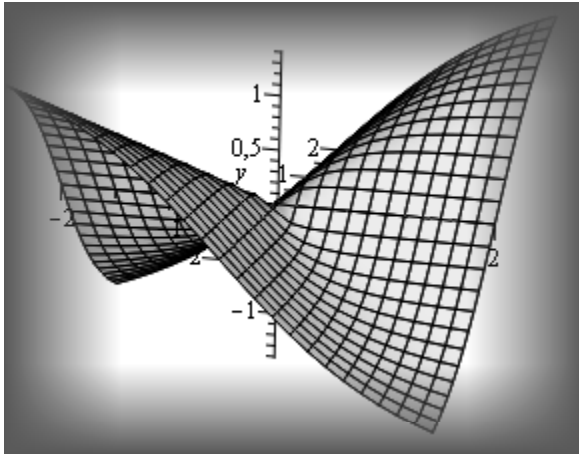
Som är ett påstående i en variabel.

Det betyder att de allmänna räknereglerna för gränsvärden från envariabelanalysen gäller också i flervariabelanalys.



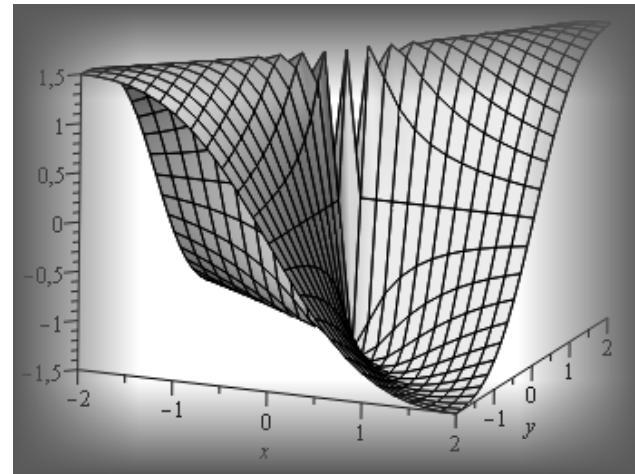
Ex

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

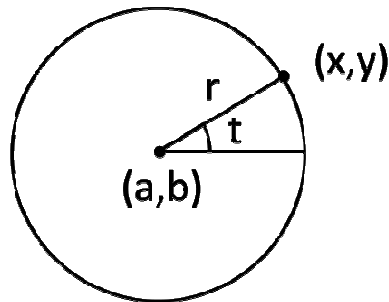


Ex

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{existerar inte.}$$



Man har ofta nytta av polära koordinater. Antag att (x,y) ska närma sig (a,b) . Om vi skriver $(x,y) = (a + r \cos(t), b + r \sin(t))$, så betyder det att r ska närma sig 0.

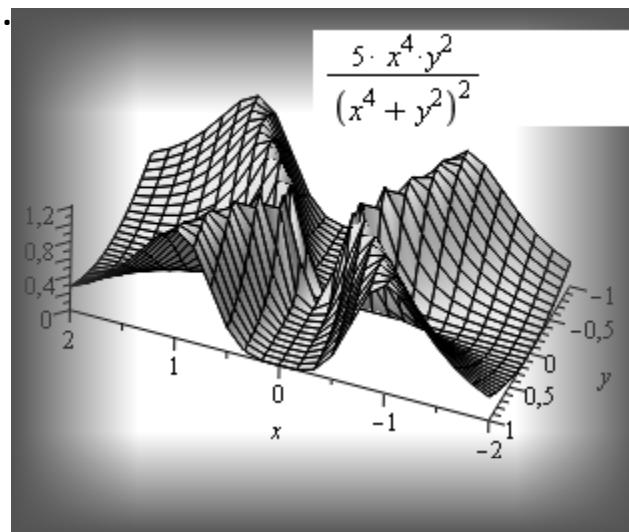


Ett sätt att gissa en funktions gränsvärde när variabeln \mathbf{x} närmar sig \mathbf{a} är att låta \mathbf{x} närma sig \mathbf{a} längs räta linjer. Men detta räcker inte för att visa att en funktion har ett visst gränsvärde. Om man däremot får olika gränsvärden längs olika linjer in mot \mathbf{a} kan man vara säker på att gränsvärdet inte finns.

Ex (Varnande)

$$f(x,y) = \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \text{ saknar gränsvärde}$$

när (x,y) går mot $(0,0)$. Men har gränsvärdet 0 längs varje linje in mot origo.



Koordinatprincipen

Funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ har gränsvärdet \mathbf{A} när \mathbf{x} går mot \mathbf{a} precis när $f_i(x)$ har gränsvärdet A_i , för varje i , $1 \leq i \leq n$.