Differentialer

Vi har sett att $f(\mathbf{x})$ i punkten $\mathbf{a}$ har lineariseringen

$$L(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \operatorname{grad} f(a) \cdot \mathbf{h}$$

Den väsentliga delen är avbildningen $\mathbf{h} \mapsto \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$, som är linjär i samma mening som i kursen i linjär algebra.
Denna linjära avbildning kallas *differentialen* $df(\mathbf{a})$ till f i punkten $\mathbf{a}$.
Vi har alltså

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$$

Tänk på x_i som funktionen $\mathbf{x} \mapsto x_i$ då gäller att $dx_i(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = h_i$.
av detta följer att

$$df(\mathbf{a}) = f_1'(\mathbf{a})dx_1(\mathbf{a}) + f_2'(\mathbf{a})dx_2(\mathbf{a}) + \cdots + f_n'(\mathbf{a})dx_n(\mathbf{a})$$

eller enklare

$$df = f_1'dx_1 + f_2'dx_2 + \cdots f_n'dx_n.$$

Parametriserade kurvor

Låt $\mathbf{x}(t)$ vara en kurva, d.v.s en funktion från ett intrvall på tallinjen till $\mathbf{R}^n$.
Linjen geonom $\mathbf{x}(t_0)$ med riktningsvektor $\mathbf{x}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \ldots, x_n'(t_0))$ är den linje som bäst ansluter till kurvan i punkten $\mathbf{x}(t_0)$.
Den fysikaliska tolkningen är att $\mathbf{x}'(t_0)$ är *hastigheten* och $|\mathbf{x}'(t_0)|$ är *farten* vid tiden t_0.
Motbakgrund av den fyskikaliska tolkningen kan man förstå att *längden* av kurvan $\mathbf{x}(t),\ t \in [a, b]$ bör vara

$$\int_a^b |\mathbf{x}'(t)|\, dt,$$

vilket också kan motiveras matematiskt.
Räkneregler:

$$\begin{aligned}
(c\mathbf{x}(t))' &= c\mathbf{x}'(t) \\
(\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t))' &= \mathbf{x}'(t) + \mathbf{y}'(t) \\
(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t))' &= \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}'(t) \\
(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t))' &= \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}'(t) \quad \text{för kurvor i rummet}
\end{aligned}$$

Parametriserade ytor

En funktion $\mathbf{r}(s,t)$ från ett område D i $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$ kallas en *parametriserad yta*.
Vektorerna $\mathbf{r}'_s(s_0,t_0)$ och $\mathbf{r}'_t(s_0,t_0)$ ger två tangentvektorer till ytan.
Om vi förutsätter att koordinatfunktionerna i $\mathbf{r}$ är av klass $\mathscr{C}^1$ och att ingen av dessa tangentvektorer är $\mathbf{0}$ kan man se att

> planet genom $\mathbf{r}(s_0,t_0)$ med riktningsvektorerna $\mathbf{r}'_s(s_0,t_0)$ och $\mathbf{r}'_t(s_0,t_0)$ förtjänar att kallas *tangentplan* till ytan.

En normalvektor till detta plan ges av

$$\mathbf{r}'_s(s_0,t_0)\times\mathbf{r}'_t(s_0,t_0)$$

Tre metoder att beräkna tangentplanet till grafen av $f(x,y)$

Grafen till $f(x,y)$, d.v.s ytan $z=f(x,y)$, kan betraktas som nivåytan $F=0$, där $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ men också som den parametriserade ytan $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$. Detta ger tre metoder:

1. f har i (a,b) linerariseringen $L(x,y)=f(a,b)+\operatorname{grad} f(a,b)\cdot(x-a,y-b)$. Grafen till den är tangentplanet:

   $$z=L(x,y)=f(a,b)+f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b)$$

   Det har normalen $(-f_x',-f_y',1)$

2. Tangentplanet till nivåytan $F=0$ har normalen $\operatorname{grad} F=(-f_x,-f_y,1)$.

3. Tangentplanet till den parametriserade ytan $\mathbf{r}$ har normalen

   $$\mathbf{r}_x'\times\mathbf{r}_y'=\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{array}\right\}=(-f_x',-f_y',1)$$

Alla ger alltså samma plan!

Linearisering av $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

En linjär avbildning $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ges av multiplikation med en matris $\mathbf{A}$. Vi tänker på punkter i $\mathbf{R}^n$ som kolonnvektorer.
En linjär approximation $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ till $\mathbf{f}$ i punkten $\mathbf{a}$ bör därför ges av

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathrm{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Vi vill ha

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathrm{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \to \mathbf{0},$$

när $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. Om vi kollar täljarens koordintater ser vi att raderna i $\mathbf{A}$ ska vara *gradieterna* till $\mathbf{f}$:s koordinatfuntkioner $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Vi ska alltså ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Om valla koordintfunktioner i $\mathbf{f}$ är av klass $\mathscr{C}^1$ får vi det önskade gränsvärdet. Matrisen kallas funktionalmatrisen eller derivatan till $\mathbf{f}$ i punkten $\mathbf{a}$ och betecknas (bl.a) $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$

Kedjeregeln för $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$

Matrisen $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{a}))$ bestämmer den linjära approximationen till $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ och $\mathbf{g}'(\mathbf{a})$ bestämmer $\mathbf{g}$:s i $\mathbf{a}$.
Därför bestämmer $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\mathbf{g}'(\mathbf{a})$ lineariseringen av $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ i $\mathbf{a}$.
Detta ger kedjeregeln

$$(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})))' = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

Funktional determinanter för funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$

Matrisen $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ (som nu är kvadratisk!) bestämmer linerariseringen av $\mathbf{f}$ i punkten $\mathbf{a}$ och därmed i viss utsträckning $\mathbf{f}$:s beteende i närheten av $\mathbf{a}$.
Beteendet av en linjär avbildning bestäms i sin tur i viss utsräckning av dess determinant.
Talet

$$\det f'(\mathbf{a}) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right) = \begin{vmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

är därför intressant.
Det kallas *funktionaldeterminanten* eller *Jacobianen* av $\mathbf{f}$ i punkten $\mathbf{a}$.
Det betecknas (något förvirrande) med

$$\frac{d(\mathbf{f})}{d(\mathbf{x})} = \frac{d(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Funktional determinanter för funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ forts.

Kedjeregeln och produktregen för determinant av matriser ger

$$\det((\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))')) = \det(\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))) \cdot \det(\mathbf{g}'(\mathbf{x}))$$

eller kortare

$$\frac{d(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})}{d(\mathbf{x})} = \frac{d(\mathbf{f})}{d(\mathbf{g})} \frac{d(\mathbf{g})}{d(\mathbf{x})}$$

Om, speciellt $\mathbf{g}$ är inversen till $\mathbf{f}$, så är $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathbf{x}$. Eftersom $d(\mathbf{x})/d(\mathbf{x}) = 1$ får vi

> Funktionaldeterminanten till inversen av en funktion är inverterade värdet av funktionens funkitonaldeterminant.

Geometrisk tolkning av funktionaldeterminanten

Funktionen $\mathbf{f}$ har i punkten $\mathbf{a}$ lineariseringen

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Den beskriver (i viss utsräckning) funktionens beteende i närheten av $\mathbf{a}$.
Absolut beloppet av determinanten $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$,

$$|\det \mathbf{f}'(\mathbf{a})|$$

är ett mått på hur den geometriska skalan ändras när man multiplicerar med den.
I två variabler anger det hur ytskalan ändras, i tre hur volymskalan ändras:

- I två dimensioner är det arean av den parllellogram som spänns av "tangentvektorerna" $\mathbf{f}'_x(\mathbf{a})$ och $\mathbf{f}'_y(\mathbf{a})$
- I tre dimensioner är det volymen av parallellepipeden som spänns av "tangentvektorerna" $\mathbf{f}'_x(\mathbf{a})$, $\mathbf{f}'_y(\mathbf{a})$ och $\mathbf{f}'_z(\mathbf{a})$.

Inversa funktionsatsen

Vi vet att en matris är inverterbar om dess determinant är $\neq 0$.
Det betyder att lineariseringen till $\mathbf{f}$ i punkten $\mathbf{a}$ är inverterbar om $\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0$.
Man kan undra om då också $\mathbf{f}$ är inverterbar.
Det gäller inte generellt eftersom, men om man bara tänker sig att $\mathbf{f}$ är definierad i en (tillräckligt liten) omgivining till $\mathbf{a}$, så stämmer det (om $\mathbf{f}$ är $\mathscr{C}^1$).

Implicit givna funktioner

Det är inte ovanligt i naturvetenskap att man har en funktion men ingen (explicit) formel förden. Allt man vet är att den finns och uppfyller ett visst samband; den är*implicit given*.

Ex Tänk på y som en funktion i sambandet $x^2 + y^2 = 1$. Vi ser att kurvan (cirkeln) runt de flesta punkter är grafen till en funktion y, men inte runt $\pm 1, 0$.
Om vi sätter $F(x, y) = x^2 + y^2$, så är kurvan nivåkurvan $F = 1$.
Gradienten $2(x, y)$ är vinkelrät mot kurvan i varje punkt.
Vi observerar att i $(\pm 1, 0)$ den vinkelrät mot y-axeln.
Detta visar sig gälla generellt:

Sats Antag att $F(x, y)$ är en $\mathscr{C}^1$ funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F = C$. Om $F'_y(a, b) \neq 0$ (d.v.s grad $F(a, b)$ inte är vinkelrät mot y-axeln) så är nivåkurvan i närheten av (a, b) graf till en $\mathscr{C}^1$-funktion: $y = f(x)$.

Från sambandet $F(x, f(x)) = C$ kan man bestämma derivator till $f(x)$ och t.ex. dess Taylorpolynom kring a.