Implicit givna funktioner 1

Inom naturvetenskap har man ibland en funktion,
men ingen (explicit) formel för den;
allt man vet är att den uppfyller ett visst samband, d.v.s den är *implicit* given.

Implicita funktionssatsen handlar om hur man
kan vara säker på att ett samband verkligen bestämmer en funktion,
även om man inte kan lösa ut den explicit.

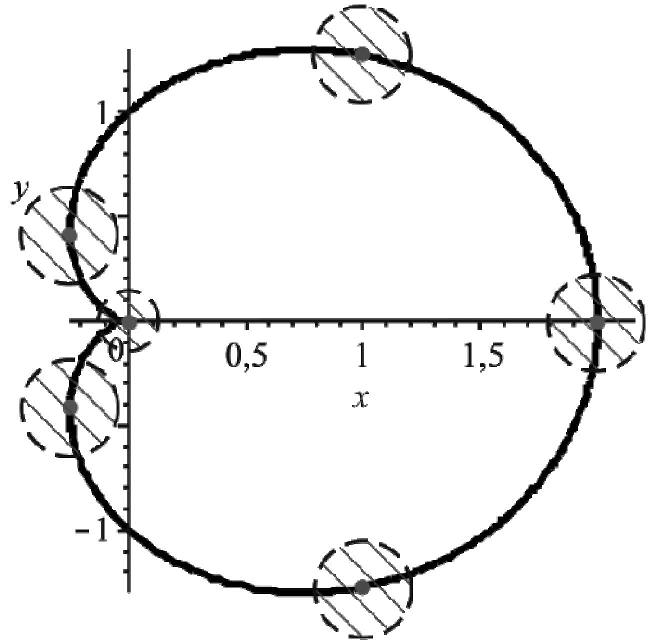
När väl det är garanterat, kan man åtminstonde beräkna ett
Taylorpolynom för funktionen kring en punkt av intresse.

Implicit givna funktioner 2

Ex Kurvan i figuren är de punkter (x, y) som uppfyller sambandet

$$(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2,$$

eller $F(x,y) = (x^2+y^2-x)^2 - (x^2+y^2) = 0$.
Det är alltså en nivåkurva.

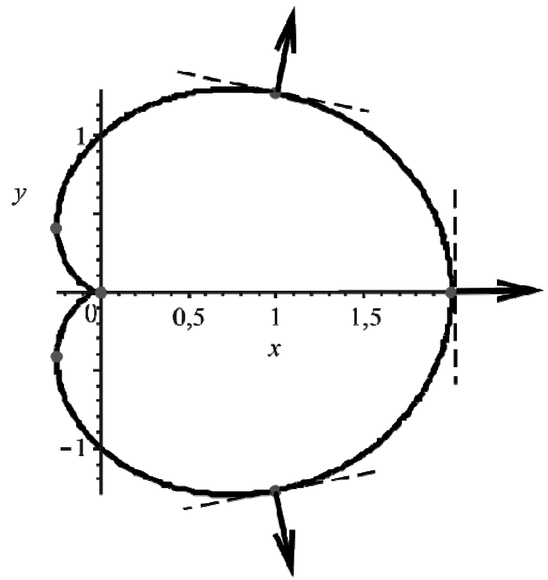


Vi ser att den är grafen till en funktion som beror på x i närheten av de gröna punkterna.
I närheten av de orangea är den graf till en funktion som beror på y.

Gradienten

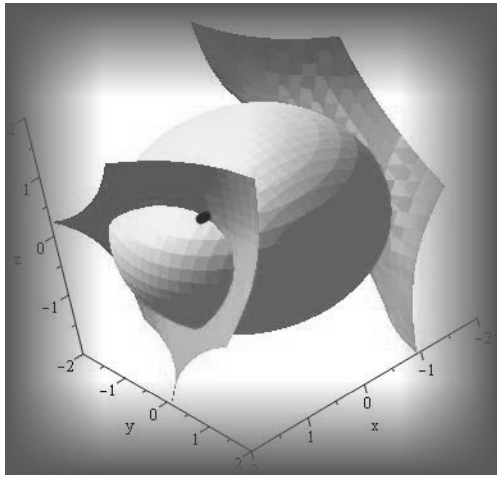
$$(F'_x, F'_y) = \left(2(x^2+y^2-x)(2x-1)-2x^2, 4y(x^2+y^2-x)-2y\right)$$

är i varje punkt på nivåytan vinkelrät mot tangenten där.
I de orangea är $F'_y = 0$ i de gröna är $F'_y \neq 0$.
Om F är av klass $\mathscr{C}^1$ och $F'_y(a,b) \neq 0$ så är nivåkurvan
$F = F(a,b)$
i närheten av a, b grafen till en $\mathscr{C}^1$-funktion $y(x)$.
Om $F'_x(a,b) \neq 0$,
är den grafen till en funktion $x(y)$.
Motsvarande gäller också för nivåytor.



Ex Visa att kurvan $(x^2+y^2-x)^2 = x^2+y^2$,
i närheten till $(1, \sqrt{(1+\sqrt{5})/2})$ är grafen till en funktion $y(x)$.
Bestäm $y'(1)$.

Kurvor i rummet som skärning mellan nivåytor 1

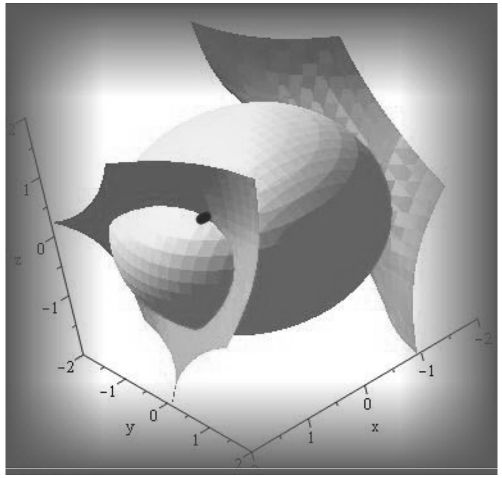


Från linjära algebran vet vi att linjer i planet kan ges som skärningen mellan två plan; ekvationen för ett plan är nivåyta till en funktion.
Allmännare kurvor får man som skärning mellan två nivåytor

$$\begin{cases} F(x,y,z) &= C \\ G(x,y,z) &= D. \end{cases}$$

Det är alltid detta fungerar; de två nivåytorna kan (t.ex) tangera varandra i en punkt, som inte blir mycket till kurva.

Kurvor i rummet som skärning mellan nivåytor 2

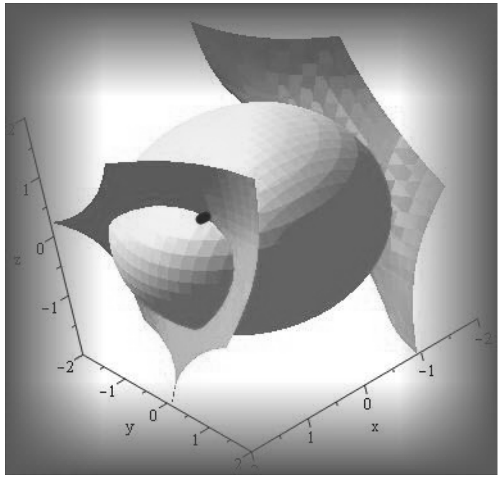


Om $\mathbf{p} = (a, b, c)$ löser ekvationssystemet och ytorna där inte skärvarandra under vinkeln 0,
d.v.s om $\nabla F(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ inte är parallella bestämmer ekvationsystemet en kurva i närheten av $\mathbf{p}$.
Villkoret kan skriva

$$\nabla F(\mathbf{p}) \times \nabla G(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}.$$

Observera att vänstra ledet är en riktningsvektor för tangentlinjen genom $\mathbf{p}$ till kurva.
Om t.ex. tredje koordinaten i denna är $\neq 0$ kan kurvan i närheten av $\mathbf{p}$ paramteriseras som $(x(z), y(z), z)$, för några funktioner $x(z)$ och $y(z)$.

Kurvor i rummet som skärning mellan nivåytor 3



Ex Visa att skärningen mellan funktionsytorna
$F=-1$ och $G=4$,
där $F(x,y,z)=(x^2+xyz)^2-2y^2-3z^2$
och $G(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$ definierar
en kurva i närheten av punkten $\mathbf{p}=(1,1,1)$ som kan
parametriseras med $x,\ y$ eller z som parameter.

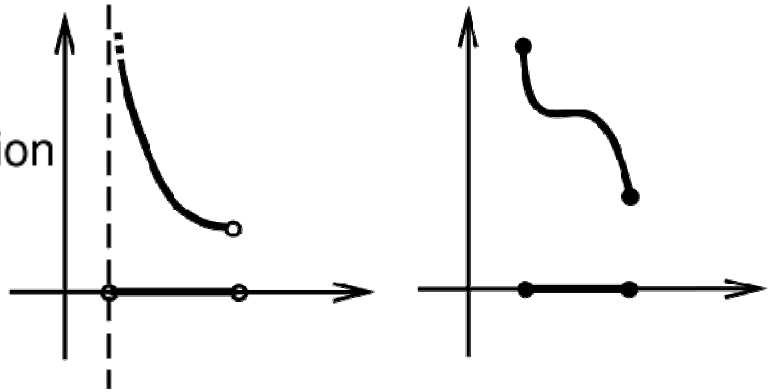
Kalkyl visar att $F(\mathbf{p})=-1$ och att $G(\mathbf{p})=4$, så att $\mathbf{p}$ ligger på båda ytorna.
Man får $\nabla F(\mathbf{p})=2(6,0,-1)$, $\nabla G(\mathbf{p})=2(1,1,2)$ och

$$\nabla F(\mathbf{p})\times\nabla G(\mathbf{p})=4(1,-13,6)\neq\mathbf{0}$$

Varje koordinat är $\neq 0$. Kurvan kan parametriseras m.a.p vilken variabel som helst.

Optimering på kompakter 1

Ett område i $\mathbf{R}^n$ är *kompakt* om det är begränsat och slutet.
Från envariablen vet vi att en kontinuerlig funktion antar ett störtsta och ett minsta värde på på en kompakt delmängd till $\mathbf{R}$.

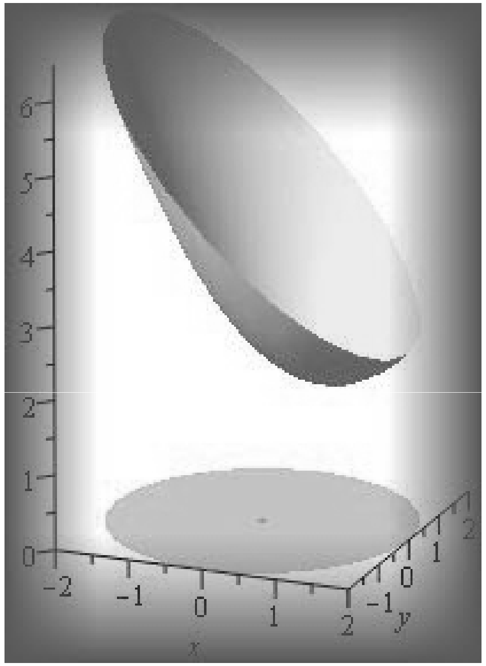


Samma sak gäller i flera variabler:

> En kontinuerlig funktion $f(\mathbf{x})$ definierad på en kompakt D i $\mathbf{R}^n$ antar säkert ett största och ett minsta värde i D.

Optimering på kompakter 2

Ex Funktionen $f(x,y) = 2 + (x-1)^2/2 + y^2/2$
har säkert ett största och minsta värde på området
där $x^2 + y^2 \leq 2$.
På området där $x^2 + y^2 < 2$ saknar den största värde.
Om (x,y) ligger på randen till området (så att $x^2 + y^2 = 2$)
kan f beräknas enligt
$f(x,y) = 7/2 - x$ där $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
I allmänhet har man nytta av att kunna parametrisera kurvan
(eller ytan) som utgör randen till området.



Optimering på kompakter 3

Största och minsta värdet av en funktion f på en kompakt D antas i en av följande typer av punkter:

1. Inrepunkter till D där $\nabla f = \mathbf{0}$.

2. Punkter på randen.

Ex Bestäm största och minsta värdet till
$f(x, y) = (2x-1)^2 + 4xy - 2y^2$
på triangelskivan med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

Optimering på områden som inte är kompakta 1

Om D inte är kompakt kan man inte direkt veta om en kontinuerlig funktion antar ett största eller minsta värde.
Man måste analysera problemet och det finns ingen standard metod att göra det.
Följande kan vara användbart om området inte är begränsat:

- Hitta en växande svit av kompakter som tillsammans fyller ut området.
  Bestäm största/minsta värde på var och en av dem.

- Hitta kompakta delar som beror på en parameter och tillsammans fyller ut området.
  Bestäm största och minsta värdet som funktioner av parametern.
  Bestäm sedan största/minsta värdet av dessa funktioner.

Optimering på områden som inte är kompakta 2

Ex Bestäm största och minsta värdena av funktionen

$$f(x,y) = (x+y)/(1+x^2+y^2)$$

om de finns.

I bland kan man från en praktisk frågeställning som ger upphov
till problemet direkt förstå att ett störtsta/minsta värd måste finnas.