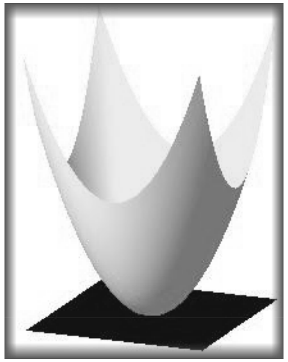
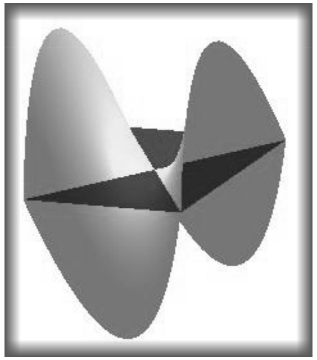
Optimering på områden som inte är kompakta

Om området inte är kompakt är det inte säkert att största/minsta värde finns.

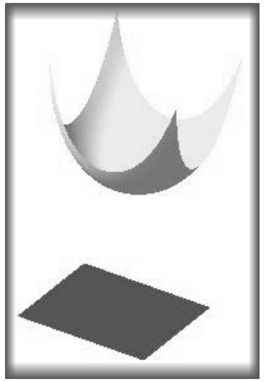
- $f(x,y) = x^2 + y^2$ på $\mathbf{R}^2$



- $f(x,y) = x^2 - y^2$ på $\mathbf{R}^2$



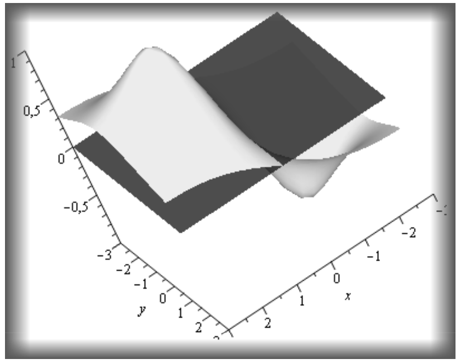
- $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$ på området där $x^2 + y^2 < 1$



Metoder för optimering på områden som inte är kompakta

1. Resonemang som gör att man kan begränsa till en kompakt.

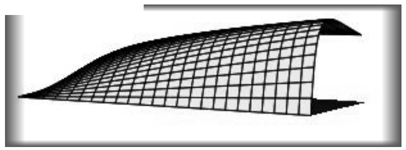
Ex $f(x,y) = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$ på $\mathbf{R}^2$.



2. Fylla ut området med kompakter.

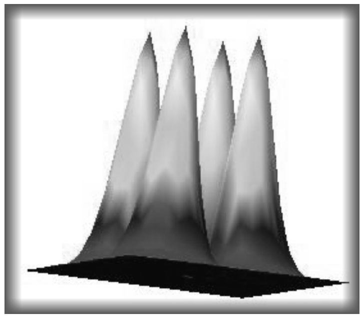
2 (a) se hur max/min på dessa varierar.

Ex $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+xy^2}$ på området som ges av $0 \leq y \leq 1$ och $0 \leq x$.



2 (b) Låta kompakter växa.

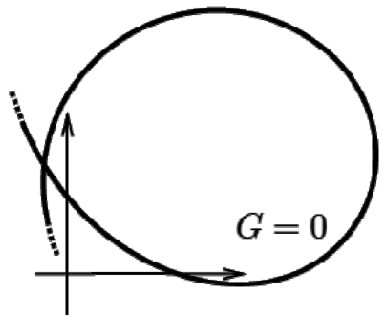
Ex $f(x,y) = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$ på $\mathbf{R}^2$.



Optimering med ett s.k bivillkor

Ex Sök största/minsta värde till $f(x,y) = xy^3$ på kurvan $x^4 + y^4 = 1$.
Är det säkert att de finns?

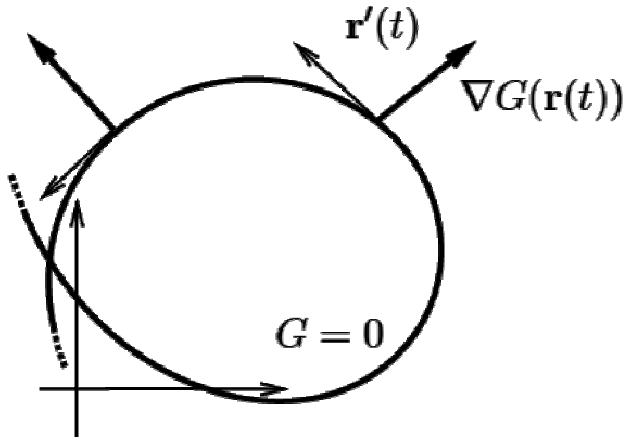
Allmän form: Sök minsta värdet av f (tänk temperatur t.ex.) på nivåkurvan $G = 0$ (detta är *bivillkoret*).



Om

$$\nabla G(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$$

kan den parametriseras kring $\mathbf{p}$ säg av $\mathbf{r}(t)$, med $\mathbf{p} = \mathbf{r}(0)$.



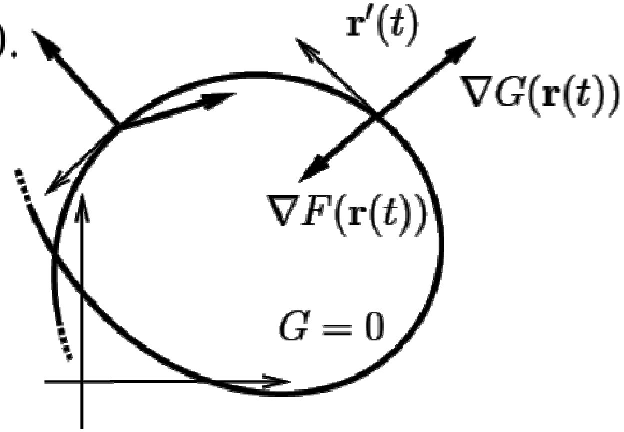
Har då $G(\mathbf{r}(t)) = 0$ som deriveras till

$$\nabla G(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$$

Optimering med ett s.k bivillkor 2

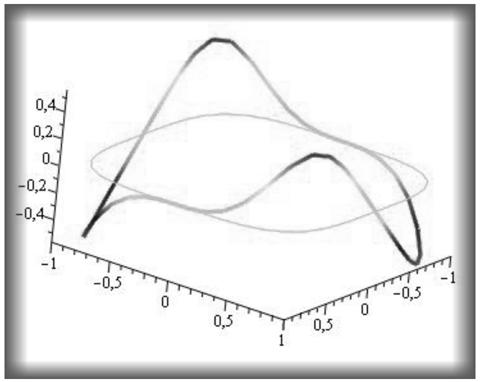
Om f har ett lokalt max eller min i $\mathbf{p}$ ska även

$$(f \circ \mathbf{r})'(0) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0.$$



Det betyder att $\nabla f(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ ska vara parallella.
Detta fukar även för nivå ytor.

Ex Sök största/minsta värde till $f(x, y) = xy^3$ på kurvan $x^4 + y^4 = 1$.

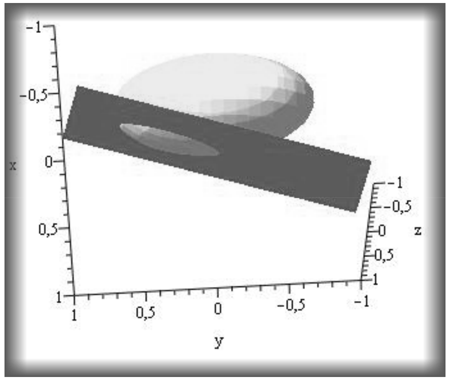


Optimering med ett s.k bivillkor 3

Sats Om f antar ett störst/minsta värde i $\mathbf{p}$ på nivåkurvan/ytan $G = 0$, så gäller

$\nabla f(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ är parallella.

Ex Bestäm största avståndet från en punkt på ellipsoiden $9x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ till planet $6x + 2y + z = 2$.



Avstånd från $\mathbf{x} = (x, y, z)$ till plan med normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Välj punkt i $\mathbf{p}$ i planet.

Det betyder att löser planets ekvation, säg $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - d = 0$.

Avståndet mellan $\mathbf{x}$ och planet är längden av vinkelräta projektionen längs $\mathbf{n}$, som är längden av $(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})/|\mathbf{n}|^2)\mathbf{n}$.

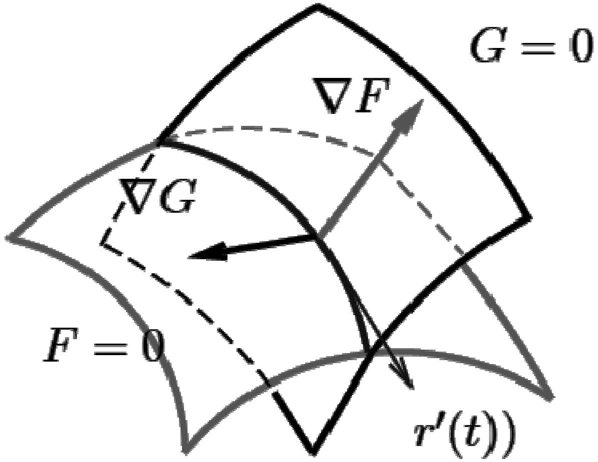
Avståndet blir då

$$\frac{|ax + by + cz - d|}{|\mathbf{n}|}.$$

Optimering med flera bivillkor

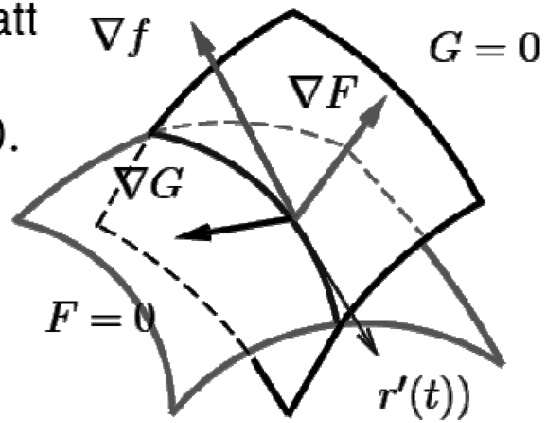
Låt $\mathbf{p}$ är en punkt på de två nivåytorna $F = 0$ och $G = 0$ som skär varandra längs en kurva.

Då är $\nabla F(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ båda vinkelräta mot kurvans tangentlinje i $\mathbf{p}$.



Parametrisera kurvan i närheten av $\mathbf{p}$ med säg $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$.

Om en funktion f har ett största/minsta värde i $\mathbf{p}$ gäller då att



$$(f \circ \mathbf{r})'(0) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0.$$

Vi ska alltså ha

$\nabla F(\mathbf{p})$, $\nabla G(\mathbf{p})$ och $\nabla f(p)$ linjärt beroende.

Optimering med flera bivillkor 2

Ex Vilken punkt på cirkeln

$$\begin{cases} 6 = x - 2y + 3z \\ 35 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \end{cases}$$

ligger närmast origo?