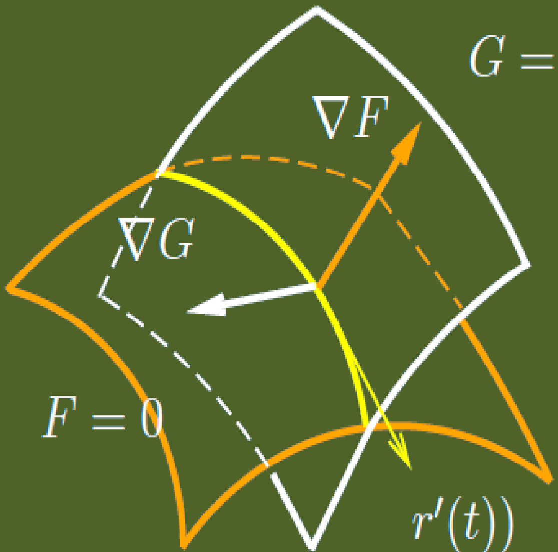
Optimering med flera bivillkor

Låt $\mathbf{p}$ är en punkt på de två nivåytorna $F = 0$ och $G = 0$ som skär varandra längs en kurva.

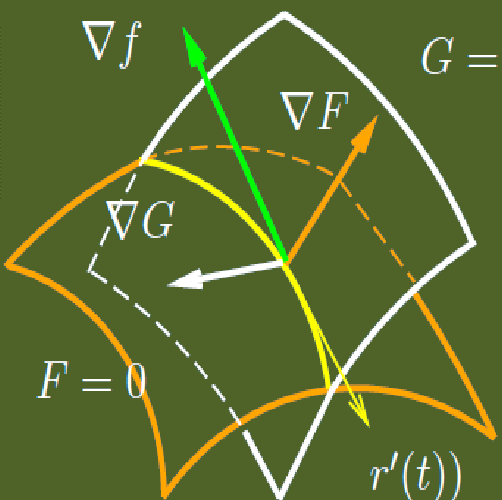
Då är $\nabla F(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ båda vinkelräta mot kurvans tangentlinje i $\mathbf{p}$.



Parametrisera kurvan i närheten av $\mathbf{p}$ med säg $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$.

Om en funktion f har ett största/minsta värde i $\mathbf{p}$ gäller då att

$$(f \circ \mathbf{r})'(0) = \nabla f(p) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0.$$



Vi ska alltså ha

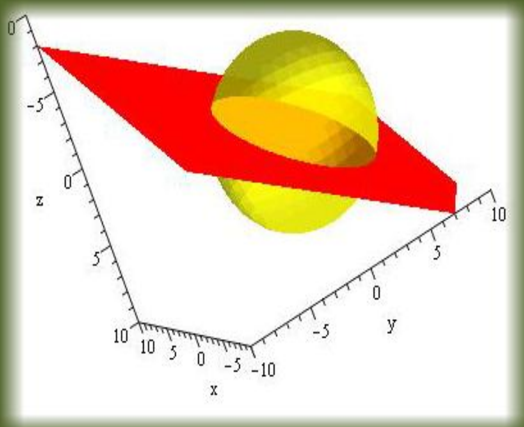
$$\nabla F(\mathbf{p}),\ \nabla G(\mathbf{p}) \text{ och } \nabla f(\mathbf{p}) \text{ linjärt beroende.}$$

Optimering med flera bivillkor 2

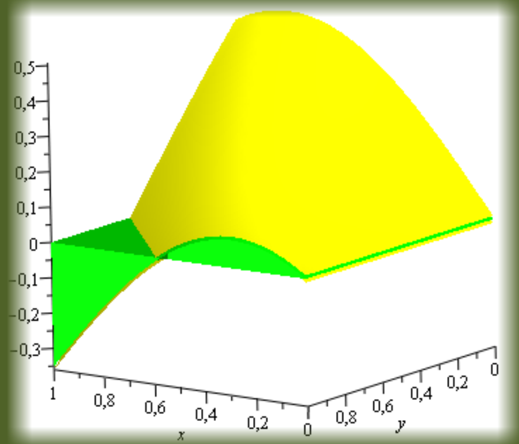
Ex Vilken punkt på cirkeln

$$\begin{cases} 6 &= x - 2y + 3z \\ 35 &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \end{cases}$$

ligger närmast origo?



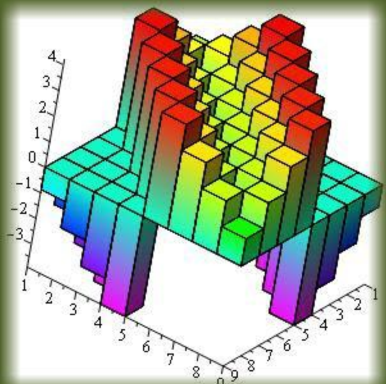
Integral av funktikoner av två variabler



Integralen av $f(x, y)$ ska mäta *volymen* mellan grafen och definitionsmängden i x, y-planet.

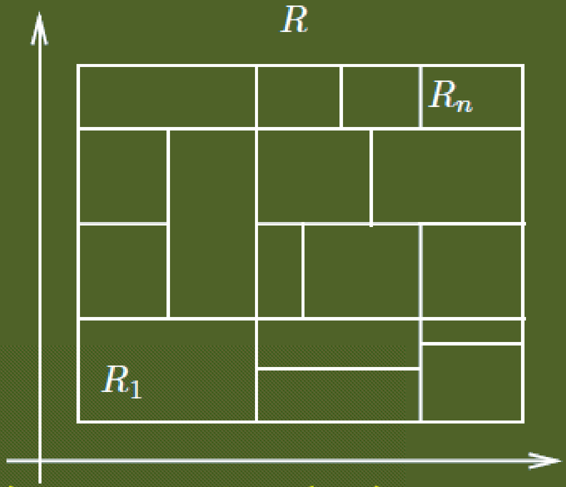
Volym ovanför x, y-planet ska räknas positivt.
Volym under ska räknas negativt.

Börjar med att tala om hur integralen ska beräknas för *trappfunktioner*.
De har grafer som är stapeldiagram.



Arean av en *rektangel* R med sidor parallella med axlarna i x, y-planet ges av produkten av de två sidlängderna.
Betecknas nu $\mu(R)$.

Man får en trappfunktion ϕ genom att dela in en rektangel i x, y-planet i mindre och sätta ϕ:s värde till olika konstanter på dessa.



Man definierar nu

$$\int\int_R \phi \, dx \, dy = \phi_1 \mu(R_1) + \phi_2 \mu(R_2) + \ldots + \phi_n \mu(R_n),$$

där ϕ_i är värdet av ϕ i rektangeln R_i.
Dubbel intgralen av ϕ över R.

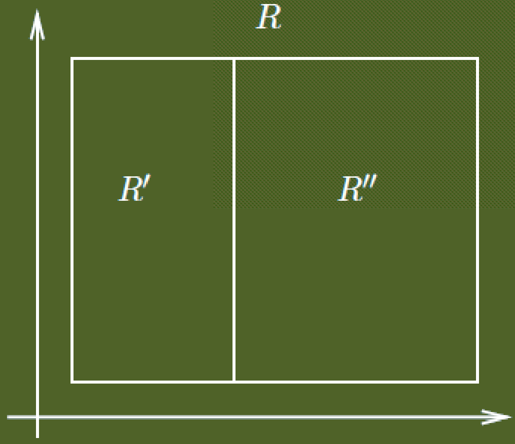
Summan $\phi + \psi$ av två trappfunktioner ϕ, ψ är en trappfunktion och

$$\int\int_R (\phi + \psi) \, dx \, dy = \int\int_R \phi \, dx \, dy + \int\int_R \psi \, dx \, dy.$$

$c\phi$, där c ären en konstant och
ϕ en trappfunktion, är en trappfunktion och

$$\int\int_R c\phi \, dx \, dy = c \int\int_R \phi \, dx \, dy.$$

Om $R = R' + R''$ är två rektanglar med en gemensam sida gäller

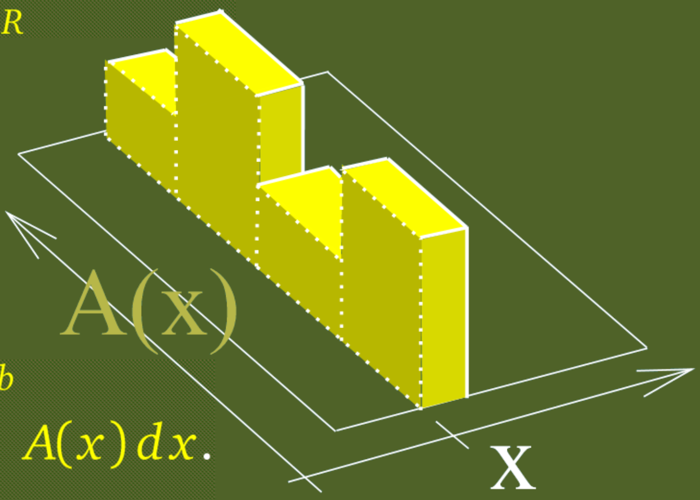


$$\int\int_R \phi\, dx\, dy = \int\int_{R'} \phi\, dx\, dy + \int\int_{R''} \phi\, dx\, dy.$$

Om $\phi \leq \psi$ på R så är

$$\int\int_R \phi\, dx\, dy \leq \int\int_R \psi\, dx\, dy.$$

$$\int\int_R \phi\, dx\, dy \leq \int\int_R |\phi|\, dx\, dy.$$



$$\int\int_R \phi\, dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_c^d \phi(x,y)\, dy\Big)\, dx = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Integrerbara funktioner på rektanglar

$f(x,y)$ är *begränsad* på rektangeln R.

Då finns trappfunktioner ϕ, ψ så att $\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y)$ för alla $(x,y) \in R$.

Då är

$$\iint_R \phi(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_R \psi(x,y)\,dx\,dy$$

f är *integrerbar* på R om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner $\phi \leq f \leq \psi$ så att

$$\iint_R \psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_R \phi(x,y)\,dx\,dy \leq \epsilon$$

I så fall finns precis ett tal λ så att

$$\iint_R \phi(x,y)\,dx\,dy \leq \lambda \leq \iint_R \phi(x,y)\,dx\,dy$$

för *alla* trappfunktioner med $\phi \leq f \leq \psi$ på R

Detta tal är *dubbelintgralen* av f över rektangeln R.
Betecknas

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Samma räkneregler som gäller för dubbelintegral av trappfunktion gäller för dubbelintegral av integrerabara funktioner.

Speciellt:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Sats En funktion som är kontinuerlig på en rektagel är integrerbar över den.

Ex Beräkna

$$\iint_R \frac{x}{(1+xy)^2}\,dx\,dy$$

där R är rektangeln $1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1$.

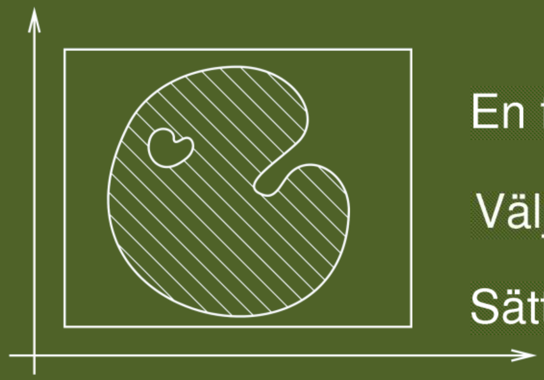
Ibland kan det vara bäst att integrera med avseende på x först.

Ex Beräkna

$$\iint_R y \cos xy \, dx \, dy$$

där R är rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

Integrerbara funktioner på godtyckligt begränsat område



En funktion $f(x, y)$ är begränsad på ett *begränsat* område D.

Välj en rektangel R som innehåller D.

Sätt $f_D = f$ på D och $f_D = 0$ på andra punkter i R.

f är integrerabar på D om f_D är integrerabar på R.
Och man sätter

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_R f_D(x, y)\, dx\, dy$$

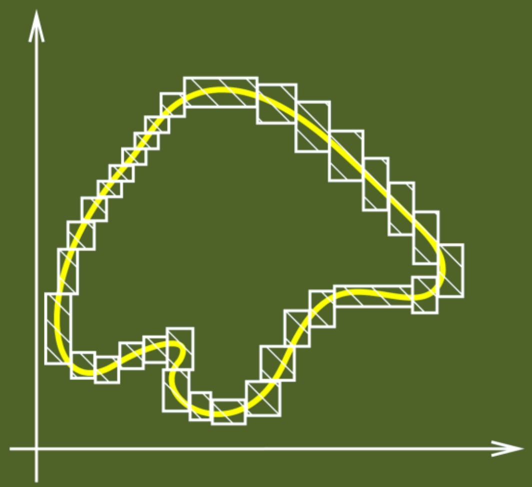
Samma räkneregler som gäller för trappfunktioner över rektanglar gäller för integrerbara funktioner över godtyckliga områden.

f_D är (i allmänhet) inte kontinuerlig på R även om f är kontinuerlig på D

För att få att en kontinuerlig funktion är integrerbar på D måste något villkor ställas på D. Området ska vara *kvadrerbart*.
Randen till det ska vara en *noll-mängd*.

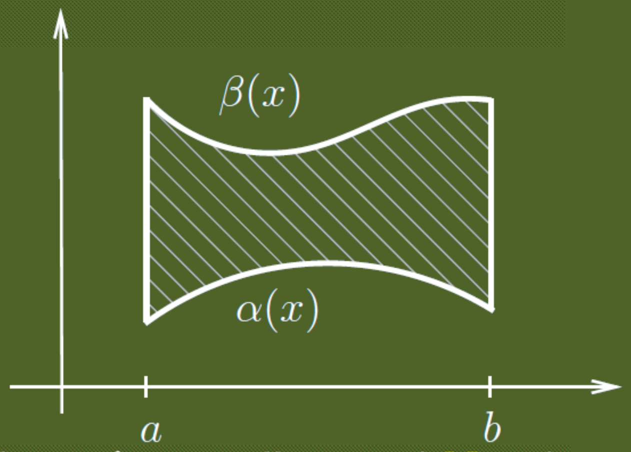
Nollmängder i planet

En mängd i planet är en *noll-mängd* om den för varje $\epsilon > 0$ kan täckas med ett ändligt antal rektanglar vars sammanlagda area är $< \epsilon$.



Grafen till en funktion av en variabel visar sig vara en mängd i planet som är en noll-mängd.

En delmängd till planet vars rand är en nollmängd är *kvadrerbar*.



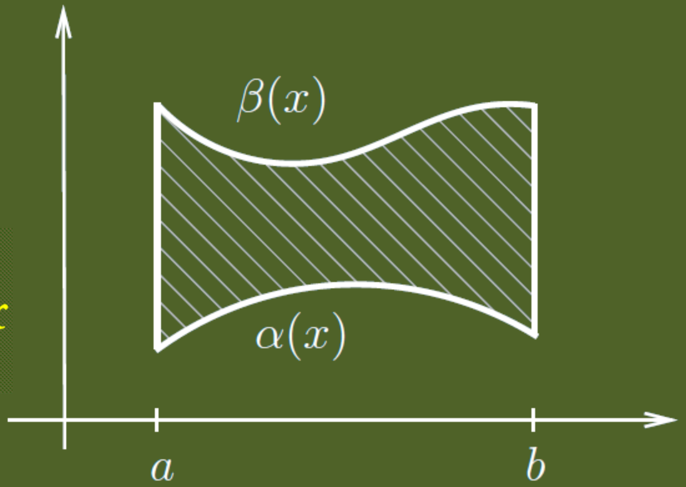
Varje funktion f som är begränsad är integrerbar på en nollmängd N och

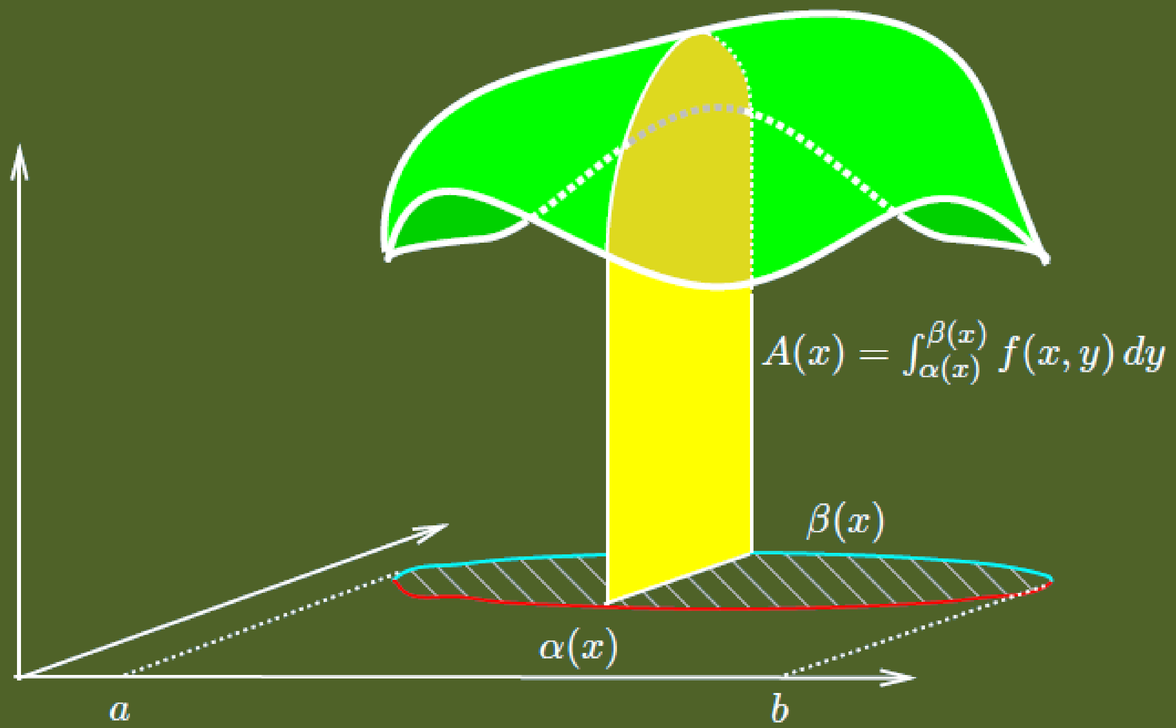
$$\iint_N f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Integration av kontinuerliga funktioner

Sats Om f är kontinuerlig på en mängd D som i figuren så är den integrerbar där och

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$





Ex Beräkna

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

Ex Beräkna

$$\iint_D \frac{y}{1+\sqrt{2}x}\,dx\,dy$$

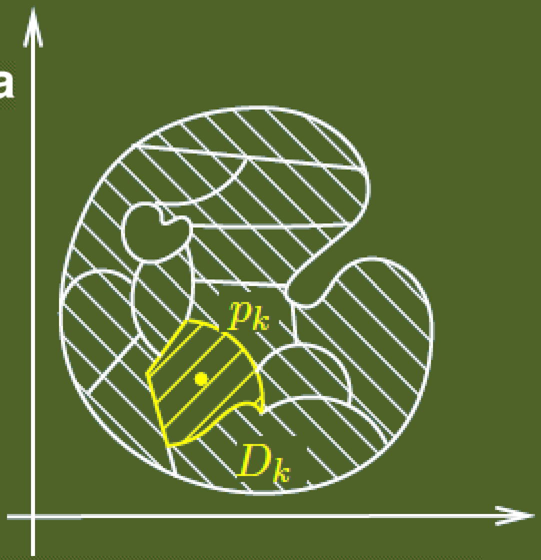
där D ges av $0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

Ex Beräkna

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(1,2)$.

Dubbelintegralen som gränsvärde av Riemannsumma



Dela in den kvadrerbara mängden D i mindre kvadrerbara delar D_k.
Välj en punkt $p_k \in D_k$

Bilda *Riemann-summan*

$$f(p_1)\mu(D_1) + f(p_2)\mu(D_2) + \ldots + f(p_n)\mu(D_n) = \sum_k f(p_k)\mu(D_k)$$

Man kan visa att man kan komma godtyckligt nära

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

om f är kontinuerlig. Man kommer närmare ju finare indelning man väljer.