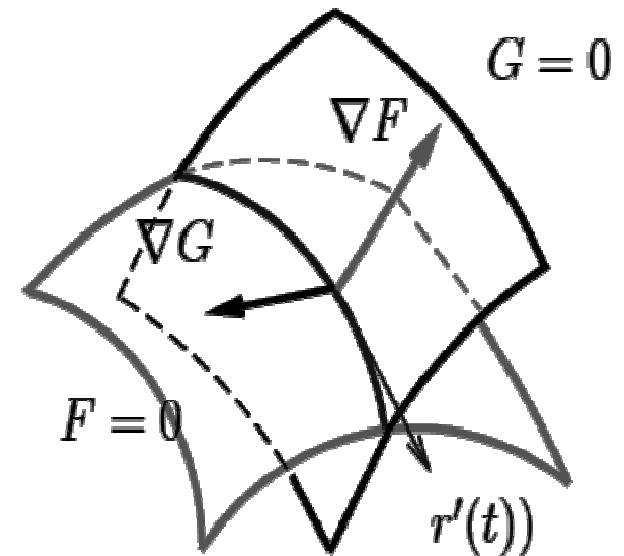


Optimering med flera bivillkor

Låt \mathbf{p} är en punkt på de två nivåytorna $F = 0$ och $G = 0$ som skär varandra längs en kurva.

Då är $\nabla F(\mathbf{p})$ och $\nabla G(\mathbf{p})$ båda vinkelräta mot kurvans tangentlinje i \mathbf{p} .

Parametrisera kurvan i närheten av \mathbf{p} med säg $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$.

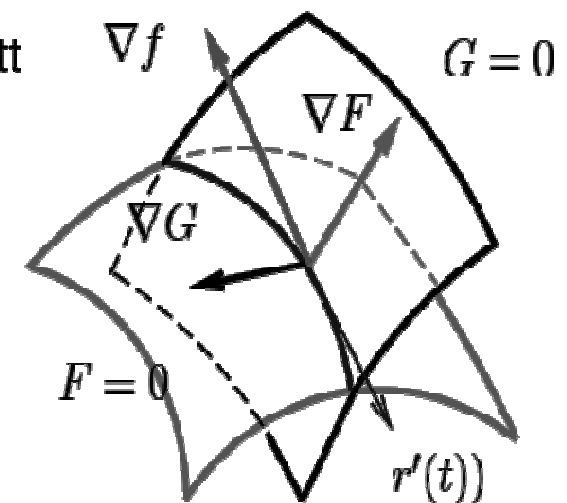


Om en funktion f har ett största/minsta värde i \mathbf{p} gäller då att

$$(f \circ \mathbf{r})'(0) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0.$$

Vi ska alltså ha

$\nabla F(\mathbf{p})$, $\nabla G(\mathbf{p})$ och $\nabla f(\mathbf{p})$ linjärt beroende.

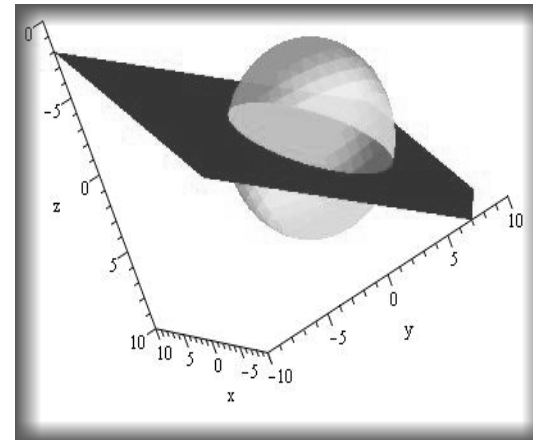


Optimering med flera bivillkor 2

Ex Vilken punkt på cirkeln

$$\begin{cases} 6 & = & x - 2y + 3z \\ 35 & = & (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \end{cases}$$

ligger närmast origo?

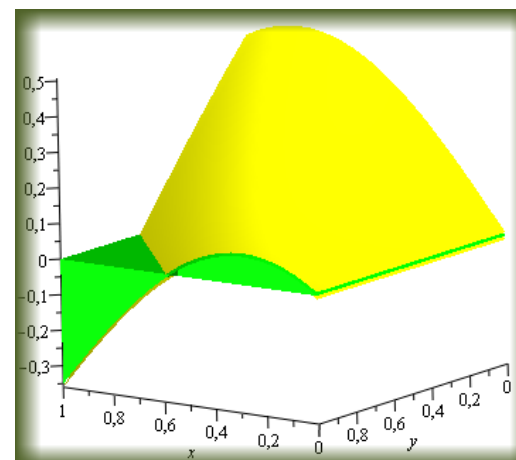


Integral av funktionser av två variabler

Integralen av $f(x, y)$ ska mäta *volymen* mellan grafen och definitionsmängden i x, y -planet.

Volym ovanför x, y -planet ska räknas positivt.

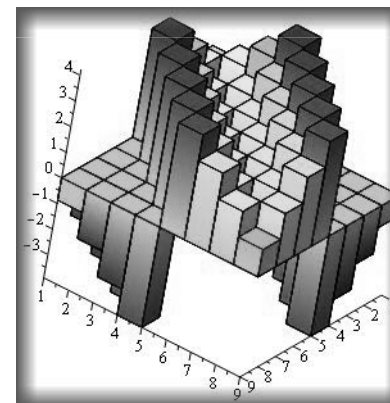
Volym under ska räknas negativt.



Börjar med att tala om hur integralen ska beräknas för *trappfunktioner*.

De har grafer som är stapeldiagram.

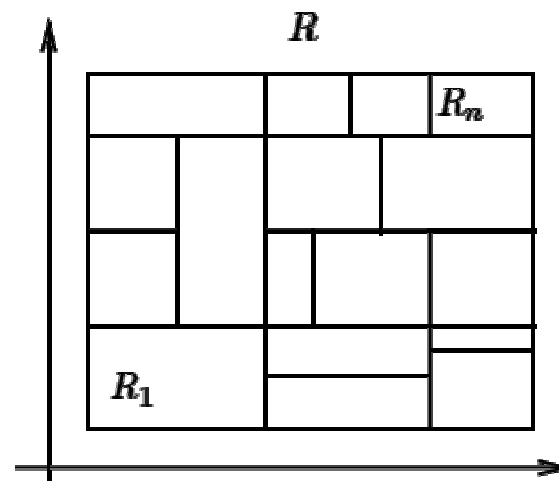
Arean av en *rektangel* R med sidor parallella med axlarna i x, y -planet ges av produkten av de två sidlängderna. Betecknas nu $\mu(R)$.



Man får en trappfunktion ϕ genom att dela in en rektangel i x, y -planet i mindre och sätta ϕ 's värde till olika konstanter på dessa.

Man definierar nu

$$\iint_R \phi \, dx \, dy = \phi_1 \mu(R_1) + \phi_2 \mu(R_2) + \dots + \phi_n \mu(R_n),$$



där ϕ_i är värdet av ϕ i rektangeln R_i .

Dubbel integralen av ϕ över R .

Summan $\phi + \psi$ av två trappfunktioner ϕ, ψ är en trappfunktion och

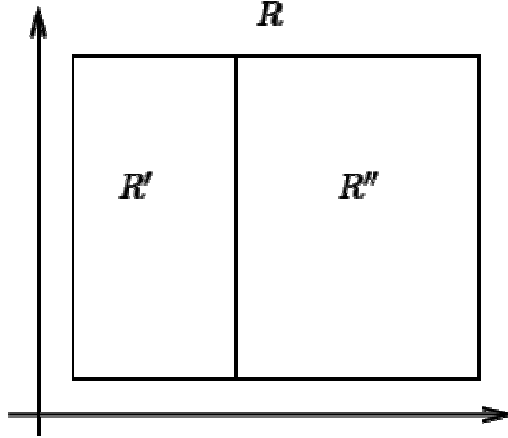
$$\iint_R (\phi + \psi) \, dx \, dy = \iint_R \phi \, dx \, dy + \iint_R \psi \, dx \, dy.$$

$c\phi$, där c är en konstant och

ϕ en trappfunktion, är en trappfunktion och

$$\iint_R c\phi \, dx \, dy = c \iint_R \phi \, dx \, dy.$$

Om $R = R' \cup R''$ är två rektanglar med en gemensam sida gäller



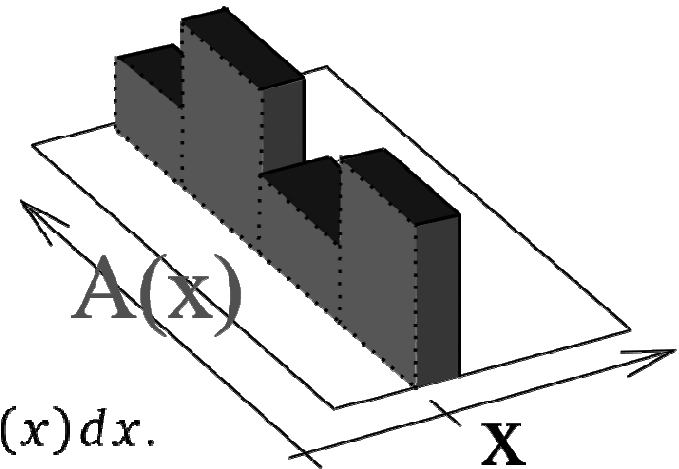
$$\iint_R \phi \, dx \, dy = \iint_{R'} \phi \, dx \, dy + \iint_{R''} \phi \, dx \, dy.$$

Om $\phi \leq \psi$ på R så är

$$\iint_R \phi \, dx \, dy \leq \iint_R \psi \, dx \, dy.$$

$$\iint_R \phi \, dx \, dy \leq \iint_R |\phi| \, dx \, dy.$$

$$\iint_R \phi \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \phi(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b A(x) \, dx.$$



Integrerbara funktioner på rektanglar

$f(x, y)$ är *begränsad* på rektangeln R .

Då finns trappfunktioner ϕ, ψ så att $\phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi(x, y)$ för alla $(x, y) \in R$.

Då är

$$\int \int_R \phi(x, y) dx dy \leq \int \int_R \psi(x, y) dx dy$$

f är *integrerbar* på R om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner $\phi \leq f \leq \psi$ så att

$$\int \int_R \psi(x, y) dx dy - \int \int_R \phi(x, y) dx dy \leq \epsilon$$

I så fall finns precis ett tal λ så att

$$\int \int_R \phi(x, y) dx dy \leq \lambda \leq \int \int_R \psi(x, y) dx dy$$

för *alla* trappfunktioner med $\phi \leq f \leq \psi$ på R

Detta tal är *dubbelintegralen* av f över rektangeln R .

Betecknas

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

Samma räkneregler som gäller för dubbelintegral av trappfunktion gäller för dubbelintegral av integrerbara funktioner.

Speciellt:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Sats En funktion som är kontinuerlig på en rektangel är integrerbar över den.

Ex Beräkna

$$\iint_R \frac{x}{(1+xy)^2} dx dy$$

där R är rektangeln $1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1$.

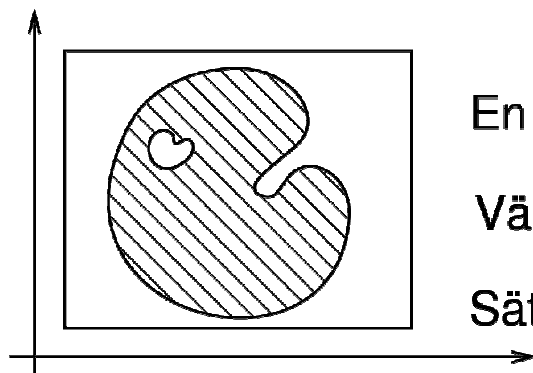
Ibland kan det vara bäst att integrera med avseende på x först.

Ex Beräkna

$$\iint_R y \cos xy \, dx \, dy$$

där R är rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

Integrerbara funktioner på godtyckligt begränsat område



En funktion $f(x, y)$ är begränsad på ett *begränsat* område D .

Välj en rektangel R som innehåller D .

Sätt $f_D = f$ på D och $f_D = 0$ på andra punkter i R .

f är integrerbar på D om f_D är integrerbar på R . Definition!

Och man sätter

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f_D(x, y) dx dy$$

Samma räkneregler som gäller för trappfunktioner över rektanglar gäller för integrerbara funktioner över godtyckliga områden.

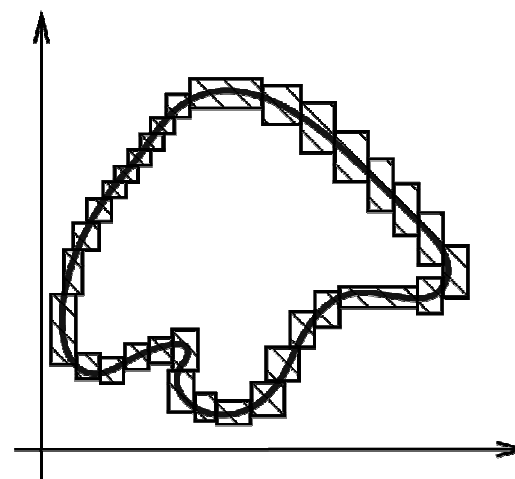
f_D är (i allmänhet) inte kontinuerlig på R även om f är kontinuerlig på D

För att få att en kontinuerlig funktion är integrerbar på D måste något villkor ställas på D . Området ska vara *kvadrerbart*.

Randen till det ska vara en *noll-mängd*.

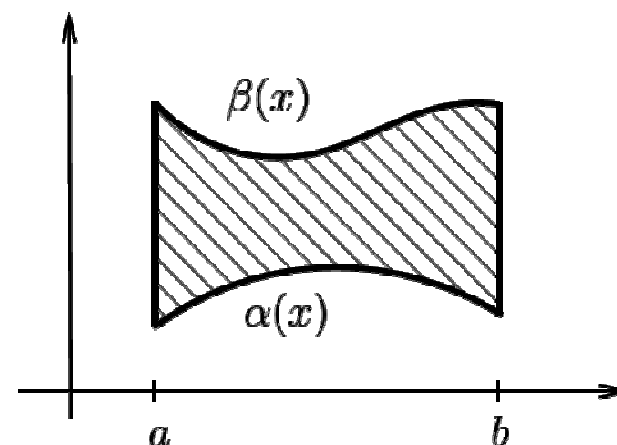
Nollmängder i planet

En mängd i planet är en *noll-mängd* om den för varje $\epsilon > 0$ kan täckas med ett ändligt antal rektanglar vars sammanlagda area är $< \epsilon$.



Grafen till en funktion av en variabel visar sig vara en mängd i planet som är en noll-mängd.

En delmängd till planet vars rand är en nollmängd är *kvadrerbar*.



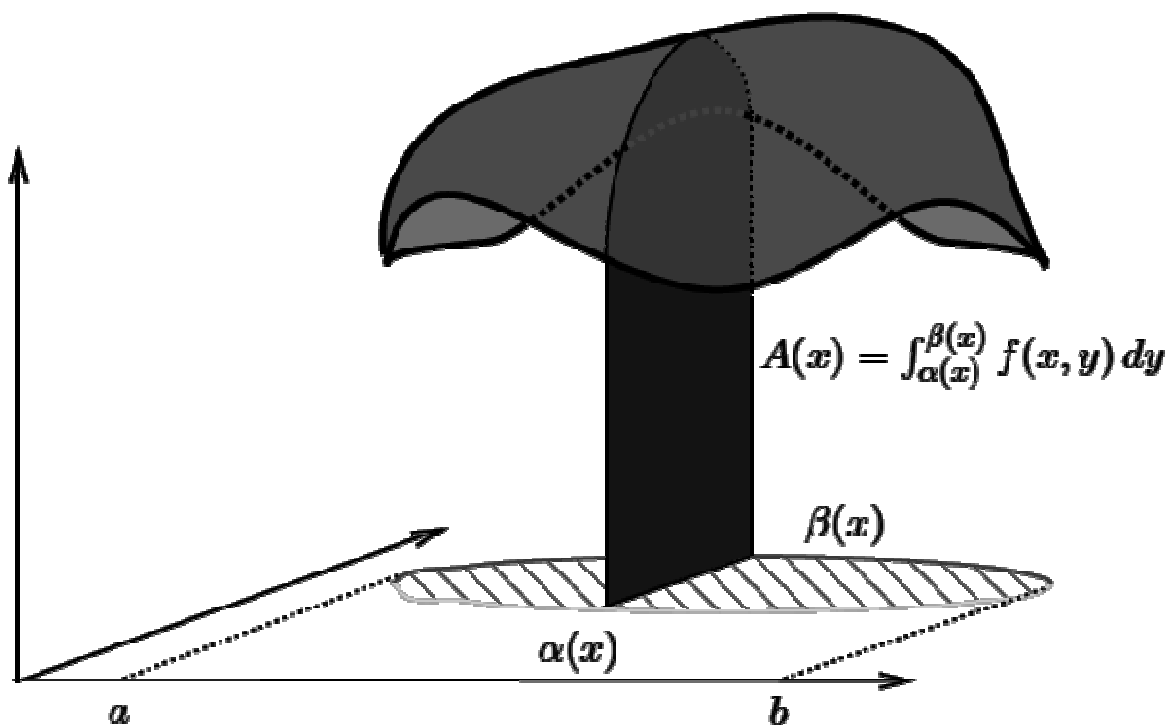
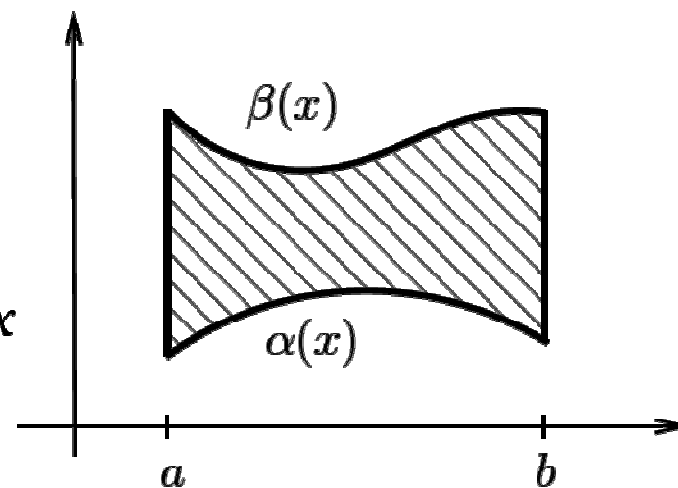
Varje funktion f som är begränsad är integrerbar på en nollmängd N och

$$\iint_N f(x, y) dx dy = 0$$

Integration av kontinuerliga funktioner

Sats Om f är kontinuerlig på en mängd D som i figuren så är den integrerbar där och

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



Ex Beräkna

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

där D är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.

Ex Beräkna

$$\iint_D \frac{y}{1 + \sqrt{2}x} dx dy$$

där D ges av $0 \leq x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$.

Ex Beräkna

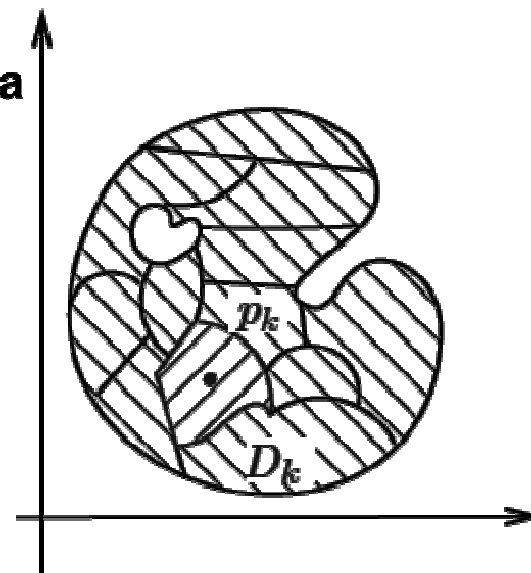
$$\iint_D y dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$ och $(1, 2)$.

Dubbelintegralen som gränsvärde av Riemannsumma

Dela in den kvadrerbara mängden D i mindre kvadrerbara delar D_k .

Välj en punkt $p_k \in D_k$



Bilda *Riemann-summan*

$$f(p_1)\mu(D_1) + f(p_2)\mu(D_2) + \dots + f(p_n)\mu(D_n) = \sum_k f(p_k)\mu(D_k)$$

Man kan visa att man kan komma godtyckligt nära

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

om f är kontinuerlig. Man kommer närmare ju finare indelning man väljer.