Lösning till dugga 2 i MMGF02 Flervariabelanalys, 10 02 16, kl 13.00–13.30.

1. Vi har

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x + 3y + 2 \\ f'_y &= 3x + 8y + 13 \end{aligned}$$

   Vi ser att båda blir 0 i $(1, -2)$, så att det verkligen är en stationär punkt. Vi får

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 4 \\ f''_{xy} = f''_{yx} &= 3 \\ f''_{yy} &= 8 \end{aligned}$$

   Detta ger den kvadratiska formen

$$Q = \frac{1}{2}(4h^2 + (3+3)hk + 8k^2) = 2h^2 + 3hk + 4k^2 = 2(h + 3k/2)^2 + 7k^2/2$$

   som är positivt definit. Allstå har f ett lokalt minimum i $(1, -2)$

   Svar: f har ett lokalt minimum i $(1, -2)$.

2. Vi sätter $G = 1 = x^4y^2 + 3y^3$. Då är y en funktion av x i närheten av $(\sqrt{2}, -1)$ om $\nabla G(\sqrt{2}, -1)$ har y-komponent $\neq 0$.

   Vi har

$$\begin{aligned} \nabla G &= \; = (4x^3y, 2x^4y + 9y^2) \\ \nabla G(\sqrt{2}, -1) &= (-8\sqrt{2}, -8 + 9) = (-8\sqrt{2}, 1) \end{aligned}$$

   Alltså är $y = y(x)$ en funktion av x i närheten av $(\sqrt{2}, -1)$.

   Vi har $1 = G(x, y(x))$ som derivaras till $0 = G'_x + G'_y y'$ detta ger

$$y'(\sqrt{2}) = -\frac{G'_x(\sqrt{2}, -1)}{G'_y(\sqrt{2}, -1)} = \frac{8\sqrt{2}}{1} = 8\sqrt{2}.$$

   Svar: $y'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.

3. Ellipsen är kompakt så f antar säkert ett största och ett minsta värde på den. Vi sätter $G = x^2 + 2y^2$. I en punkt där f antar ett maximum eller minimum gäller

$$\begin{cases} \nabla f \text{ och } \nabla G \text{ parallella} \\ G = 1 \end{cases}$$

Vi har $\nabla f = (y, x)$ och $\nabla G = (2x, 4y)$. De är parallella precis när

$$0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 2(2y^2 - x^2)$$

Vi ska alltså lösa

$$\begin{cases} 0 & = & 2y^2 - x^2 \\ 1 & = & x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

Addtion ger $1 = 4y^2$, så att $y = \pm 1/2$. Subtraktion ger $1 = 2x^2$, så $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi får punkterna $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/2)$.

Värdet av f i dessa är $\pm 1/(2\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}/4$.

Svar: Största värdet är $\sqrt{2}/4$ och minsta är $-\sqrt{2}/4$.