

Repetitionsuppgifter

Gränsvärden

1. Avgör gränsvärdet existerar. Betsäm det i förekommande fall.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \left(\frac{1}{x^3 + y^2} + \ln(x^3 + y^2) \right)$$

Kedjeregeln och partiella differentialekvationer

2. Lös differentialekvationen $f'_x - xf'_y = y$ t.ex. genom att göra variabelbytet $u = ax^2 + y$, $v = x$ för lämplig konstant a . Bestäm också den lösning f sådan att $f(x, 0) = x^2 + x^3/3$.
3. Lös differentialekvationen $x^2 f'_x + y^2 f'_y = y$ t.ex. genom variabelbytet $u = 1/x - 1/y$ och $v = 1/y$.

Gradient och riktningsderivata

4. Bestäm $f'_v(1, 2)$ om \mathbf{v} är den riktning som bestäms av vektorn $(-3, 4)$ och $f(x, y) = x^2y - 3xy$
5. I vilken riktning växer funktionen $f(x, y) = x/y$ snabbast i punkten $(-2, 3)$?
6. Bestäm riktningsderivatan till $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$ i $(1, 1)$ i den riktning som ges av $(3, 4)$.

Tangentlinjer och tangentplan

7. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ i punkten $(1, 0)$.
8. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till den parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1, t^3 - t)$ i punkten $(5, 6)$ på kurvans spår.
9. Bestäm en parametrisering av tangentlinjen till den parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ i punkten $(1, 1, 1)$ på kurvans spår.
10. Ytorna $x^2 + y^2 - z^2 = 2$ och $x + y - 2e^z = 0$ skär varandra i en kurva genom $(1, 1, 0)$. Bestäm en parametrisering av tangentlinjen till kurvan i denna punkt.
11. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3 + 4x^2y + y = z^2$ i punkten $(1, 0, 1)$.
12. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 3/2, 2)$ till ytan som parametriserar av

$$\mathbf{r}(s, t) = (s, s^2 + s \cos(t), s + \sqrt{3}s \sin(t)), 0 \leq s \leq 2, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Taylorutveckling och lokala extemvärden

13. Bestäm de lokala extrempunkterna till $f(x, y) = xye^{-x-2y}$.
14. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ kring punkten $(\pi/4, \pi/4)$.
15. Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2$ och avgör deras karaktär.
16. Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$ och avgör deras karaktär.
17. Punkten $(1, 1/\sqrt{2})$ är en stationär punkt till

$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{1 + x^2y^2}.$$

Avgör om det är en lokal extrempunkt.

Linjär approximation, inversa och implicita funktions­satsen

18. Visa att sambandet $xe^y + ye^z + ze^x = 1$ definierar z som en differentierbar funktion i en omgivning till $(0, 1, 0)$. Bestäm $z'_x(0, 1)$ och $z'_y(0, 1)$.
19. Visa att sambandet $z(\cos x + \sin y) = 0$ definierar z som en funktion av x och y i närheten av $(0, 0, 0)$, men inte i närheten av $(\pi/4, -\pi/4, 1)$.

Optimering

20. Motivera att funktionen $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ har ett största och ett minsta värde i triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(6, 0)$ och $(0, 6)$. Bestäm dessa värden!
21. Motivera att funktionen $f(x, y) = xy$ antar ett största och ett minsta värde i det området i planet där $2x^2 + y^2 \leq 1$. Bestäm dessa värden.
22. Bestäm eventuella största och minsta värden till funktionen $f(x, y) = xy/(1 + x^2 + y^2)$ på sektorn $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x$, $0 \leq y$.
23. Bestäm eventuella största och minsta värden till funktionen $f(x, y) = (x + y)/(1 + x^2 + y^2)$ på området $0 \leq x, 0 \leq y$.
24. Motivera att $f(x, y) = (x + y)/(1 + x^2 + y^2)$ har ett största och ett minsta värde i området som ges av $1 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq x$ och $0 \leq y$. Bestäm också dessa värden.
25. Motivera att funktionen $f(x, y) = xy^2e^{-x^2-y^2}$ har ett största och ett minsta värde i området där $x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \leq 0$. Bestäm dessa värden!
26. Bestäm det största värde som $f(x, y) = x^2y$ antar på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$.
27. Bestäm största och minsta värdet som $f(x, y, z) = x - y^2 + z$ antar på ytan $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$.
28. Bestäm största och minsta värdet som $f(x, y, z) = x - y + z$ antar på skärningen mellan ytorna $(x - 1)^2 + y^2 = z$ och $x + y + z = 2$.

Dubbelintegraler

29. Beräkna $\iint_D y \sin(xy) dx dy$, där D ges av $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

30. Beräkna

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

där D ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ och $0 \leq x \leq y$.

31. Beräkna

$$\iint_D \frac{1 + x}{1 + 2x + y} dx dy,$$

där D ges av $1 \leq 2x + y \leq 2$, $-2 \leq x - 2y \leq 1/2$.

32. Beräkna

$$\iint_D \sin((2x + y)^2) dx dy,$$

där D ges av $2x + y \leq 4$, $0 \leq x$, $0 \leq y$.

33. Beräkna $\iint_Y (x - y) dS$, där Y är ytan som ges av $z = 4 - x^2 - y^2$, $1 \leq x + y \leq 2$.

34. Beräkna arean av ytan som ges av $z = 2 + x^2 + y^2$, $z \leq 6$.

Trippelintegraler

35. Beräkna $\iiint_K x^2 dx dy dz$, när K är den begränsade kropp som innesluts av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 8 - x^2 - y^2$.

36. Beräkna $\iiint_K z dx dy dz$, där K är den del av enhetsklotet som ges av $|x| \leq y$, $z \geq 0$.

37. Beräkna volymen av den kropp som ges av $4 \geq z \geq x^2 + 4y^2$.

Kurvintegraler och Greens formel

38. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} x^2 ds$, där γ är kurvan $x^2 + y^2 = 1$

39. Beräkna $\int_{\gamma} x dx + (x + y^2) dy$, är γ är kurvan längs enhetscirkeln från $(0, 1)$ till $(-1, 0)$ i positiv led.

40. Beräkna $\int_{\gamma} xy dx + y^2 dy$, där γ är kurvan som går från $(0, 1)$ till $(1, 0)$ kortaste vägen längs enhetscirkeln och därefter fortsätter till $(2, 1)$, kortaste vägen längs cirkeln med medelpunkt i $(2, 0)$ och radie 1.

41. Beräkna $\int_{\gamma} x^4 dx + xy dy$, där γ är kurvan som i tur och ordning går längs linjestycken mellan punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och sedan tillbaka till $(0, 0)$.

42. Beräkna $\int_{\gamma} (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, där γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ genomlöst ett varv medurs.

43. Beräkna det abete som kraftfältet $\mathbf{F} = (x^2y + \sin x, \sqrt{\cos y} + x)$ uträttar när en partikel rör sig från punkten $(3, 2)$ till $(0, 5/2)$ kortaste vägen längs ellipsen $x^2 + 4y^2 = 25$.

44. Beräkna det arbete vektorfältet $\mathbf{F} = (x, zx, yz)$ utför då en partikel rör sig längs kurvan (t, t^2, t^3) , och t går från 0 till 1.

45. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (x + e^y, xy^2 + x \sin(x^2 + 1))$ genom kurvan $y^2 = x$, $1 \leq x \leq 4$ i riktning uppåt (positiv y -koordinat).

Potentialer i planet

46. Bestäm alla funktioner $g(y)$, sådan att $g\mathbf{F}$ blir konservativt när $\mathbf{F} = (y \sin x, y \cos x)$. Bestäm alla potentialer till $g\mathbf{F}$, för dessa g .

47. Beräkna

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} dy$$

för varje kurva γ från $(1, 2)$ till $(-1, 4)$ i området där $y > |x|$.

48. Vilket eller vilka av följande vektorfält har en potential i området som består av planet utom origo?

(a) $\mathbf{F} = (x^2 + y, xy)$

(b) $\mathbf{F} = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$

(c) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2x, x^2y)$

(d) $\mathbf{F} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$

Bestäm alla potentialer i förekommande fall.

Gauss och Stokes satser

49. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + \ln(1 + z^2), y^2 + \arctan z, xy^2)$$

ut genom ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 1$.

50. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + e^{\sin z}, y + \cos(z^2), z)$$

genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ med uppåtriktad normal.

51. Låt γ vara kurvan som ges av $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = 4 + y^2$ genomlöst ett varv moturs sett uppifrån z -axeln. Beräkna

$$\int_{\gamma} \arctan x dx + (x^2 + y) dy - (e^z + xy) dz.$$

52. Beräkna $\iint_Y \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} dS$, när Y är ytan som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med \mathbf{N} är riktad bort från origo och

$$\mathbf{u} = (\ln(1 + x^2 + z^2), xy^2, y + \arctan z).$$