

Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 11 08 26 (Fysikprogrammet)

1. Vi har

$$\text{grad}f = \left(z + \frac{z}{1 + (xz - y)^2}, -\frac{1}{1 + (xz - y)^2}, x + \frac{x}{1 + (xz - y)^2} \right),$$

som ger

$$\text{grad}f(-1, -4, 2) = \left(2 + \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -1 - \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{6}{5} \right).$$

Svar: $(12/5, -1/5, -6/5)$.

2. Ytan är nivåytan $g(x, y, z) = xy + xy^2 - z = 0$ och punkten på ytan är $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 2)$.

Vi har $\text{grad}g = (y + y^2, x + 2xy, -1)$. En normal till tangentplanet i $(1, 1, 2)$ ges av $\text{grad}g(1, 1, 2) = (2, 3, -1)$ där. Eftersom det går genom $(1, 1, 2)$ är därför $0 = (2, 3, -1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 2x + 3y - z - 3$ en ekvation för

Svar: $3 = 2x + 3y - z$.

3. Triangelskivan är kompakt och f kontinuerlig, så största och minsta värde finns med säkerhet.

Vi söker stationära punkter i det inre av triangelskivan. Där gäller $0 = f'_x = (1 + x)e^{x-3y}$, $0 = f'_y = -3xe^{x-3y}$. Den andra ekvationen ger $x = 0$ som inte löser den första. Stationära punkter (i det inre) saknas.

Vi undersöker f längs randen på området, som utgörs av linjestyckena $y = -2$, $0 \leq x \leq 3$, $y = x/2 - 2$, $0 \leq x \leq 2$ samt $y = 1 - x$, $2 \leq x \leq 3$.

Vi får i tur och ordning $f_1(x) = f(x, -2) = xe^{x+6}$, $0 \leq x \leq 3$, $f_2(x) = f(x, x/2 - 2) = xe^{-x/2+6}$, $0 \leq x \leq 2$ samt $f_3(x, 1 - x) = xe^{4x-3}$.

Vi har $f'_1 = (1+x)e^{x+6}$, $f'_2 = (1-x/2)e^{5x/2+6}$ samt $f'_3 = (1+4x)e^{4x-3}$, som alla är icke-negativa på respektive funktions aktuella intervall. Det betyder att f_1 , f_2 och f_3 alla är växande på sina respektive intervall. Alltså måste största och minsta värden för f antas i triangels hörnpunkter. Vi har $f(0, -2) = 0$, $f(2, -1) = 2e^5$ och $f(3, -2) = 3e^9$.

Svar: Största värdet är $3e^9$, det minsta 0.

4. Vi gör det föreslagna variabelbytet och får med kedjeregeln $f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 1$ samt $f'_y = f'_u \cdot (-a) + f'_v \cdot a$, som ger $0 = 3f'_x + f'_y = f'_u(3 - a) + f'_v(3 + a)$. Vi väljer $a = 3$ och får ekvationen $0 = 6f'_v$, eller $0 = f'_v$. Detta ger $f(x, y) = g(u) = g(x - 3y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

Vi ska ha $\sin 3x = f(x, 0) = g(x)$, vilket bestämmer att $g(u) = \sin 3u$. Alltså är $f(x, y) = \sin 3(x - 3y)$

Svar: $f(x, y) = \sin(3x - 9y)$.

5. Området är instängt mellan grafen till två funktioner av x och integralen kan därför beräknas enligt

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{6xy}{(1 + xy^2)^2} dx dy &= \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{2+x}}^{\sqrt{6+9x}} \frac{6xy}{(1 + xy^2)^2} dy \right) dx = - \int_2^4 \left[\frac{3}{1 + xy^2} \right]_{\sqrt{2+x}}^{\sqrt{6+9x}} dx = \\ &= \int_2^4 \left(\frac{3}{1 + x(2+x)} - \frac{3}{1 + x(6+9x)} \right) dx = \\ &= \int_2^4 \left(\frac{3}{(1+x)^2} - \frac{3}{(1+3x)^2} \right) dx = \left[-\frac{3}{1+x} + \frac{1}{1+3x} \right]_2^4 = \\ &= \frac{3}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5} - \frac{6}{91} = \frac{182 - 30}{455} = \frac{152}{455} \end{aligned}$$

Svar: $152/455$.

6. Massan ges av trippelintegralen av densiteten över kroppen:

$$\iiint_K xy \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

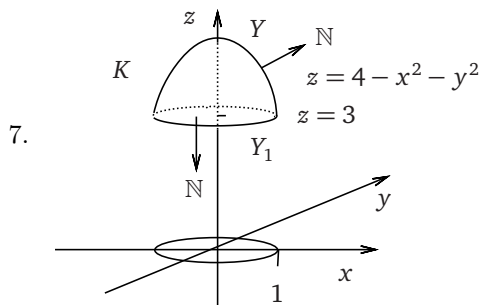
Vi går över till sfäriska koordinater genom att sätta $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ och $z = r \cos \theta$. I kvartsklotet ska $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och absolutbeloppet av Jakobianen är $r^2 \sin \theta$. Detta ger

$$\begin{aligned} & \iiint_K xy \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \iiint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2} r^4 \ln(1 + r^2) \cos \phi \sin \phi \sin^3 \theta dr d\phi d\theta = \\ &= \int_0^1 r^4 \ln(1 + r^2) dr \int_0^\pi \cos \phi \sin \phi d\phi \int_0^{\pi/2} (\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = \\ &= \int_0^1 r^4 \ln(1 + r^2) dr \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^\pi \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} = \int_0^1 r^4 \ln(1 + r^2) dr \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Det återstår att beräkna den sista integralen. Partiell integration och polynomdivision ger

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^4 \ln(1 + r^2) dr &= \left[\frac{r^5}{5} \ln(1 + r^2) \right]_0^1 - \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{r^6}{1 + r^2} dr = \\ &= \frac{\ln 2}{5} - \int_0^1 \left(\frac{(r^2 + 1)(r^4 - r^2 + 1) - 1}{1 + r^2} \right) dr = \\ &= \frac{\ln 2}{5} - \int_0^1 \left(r^4 - r^2 + 1 - \frac{1}{1 + r^2} \right) dr = \\ &= \frac{\ln 2}{5} - \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^3}{3} + r - \arctan r \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{5} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \pi/4 \right) = \\ &= \frac{\ln 2}{5} - \frac{13}{15} + \pi/4 \end{aligned}$$

Svar: $\ln(2)/15 - 13/45 + \pi/12$.



Flödet ges av ytintegralen $\int_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} dS$, där \mathbb{N} är den uppåtriktade normalen till ytan.

Ytan är inte randen till en kropp, men genom att lägga till ytan Y_1 som ges av $z = 3$, $x^2 + y^2 \leq 1$, med nedåtriktad normal, får vi att $Y + Y_1$ är den positivt orienterade randen till den kropp K som bestäms av $3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Vi har

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy + z) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 0 + x + 0 = x$$

Divergenssatsen och polära koordinater ger

$$\begin{aligned} \int_Y + \int_{Y_1} &= \iiint_K x dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} x(4 - x^2 - y^2 - 3) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2(1 - r^2) \cos t dt \right) dr = \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \left[\sin t \right]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

vilket man också kan komma fram till genom symmetriresonemang.

Ytan Y_1 parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 3)$, $x^2 + y^2 \leq 1$, som ger normalen

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = (0, 0, 1)$$

som är motsatt riktad mot den normal vi ska använda. Detta ger

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} dS &= - \int_{Y_1} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} dS = \iint_{Y_1} \mathbb{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} x dx dy = \int_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi} r^2 \cos t dr dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

vilket också kan inses med symmetriresonemang.

Svar: 0.

8. (c) Funktionalmatrisen till \mathbf{f} är

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lineariseringen ges av

$$\mathbf{L}(x, y) = \mathbf{f}(1, 2) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x + y - 4 \\ 2x + 4y - 10 \end{pmatrix} = (2x + y - 2, 2x + 4y - 5)$$