Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 13 03 15 (Fysikprogrammet)

1. Ytan är nivåytan $f(x, y, z) = 0$ där $f(x, y, z) = 5x^2y + 2xz^3 - 2y^2$, vars gradient är $\operatorname{grad} f(x, y, z) = (10xy + 2z^3, 5x^2 - 4y, 6xz^2)$. En normal till tangentplanet ges av $\operatorname{grad} f(1, 2, -1) = (18, -3, 6)$. Vi kan använda normalen $(6, -1, 2)$.

   En ekvation för tangentplanet ges därför av $0 = (6, -1, 2) \cdot (x - 1, y - 2, z + 1) = 6x - y + 2z - 2$.

   Svar: $0 = 6x - y + 2z - 2$.

2. Man har

$$\begin{aligned} f'_x &= af'_u \\ f'_y &= 2yf'_u + f'_v \end{aligned}$$

   Vilket ger att $yf'_x + 2f'_y = (a + 4)yf'_u + 2f'_v$ så om vi väler $a = -4$ blir ekvationen

$$2f'_v = x + y = -(u - v^2)/4 + v, \text{ eller } f'_v = v^2/8 + v/2 - u/8,$$

   som integreras till $f = v^3/24 + v^2/4 - uv/8 + g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

   Detta ger $f(x, y) = y^3/24 + y^2/4 - (-4x + y^2)y/8 + g(y^2 - 4x)$ som förenklas till $f(x, y) = y^2/4 - y^3/12 + xy/2 + g(y^2 - 4x)$.

   Svar: $f(x, y) = y^2/4 - y^3/12 + xy/2 + g(y^2 - 4x)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

3. Skivan är kompakt och f är kontinuerlig och antar därför säkert ett största och ett minsta värde på skivan. Det antas antingen i en stationär punkt i det inre eller på randen som ges av $g(x, y) = x^2/2 + y^2/4 = 1$.

   Stationära punkter löser $0 = f'_x = 3x^2$ och $0 = f'_y = -3y^2$ vilket ger den enda stationära punkten $(0, 0)$ som ligger i det inre av skivan. Där är $f(0, 0) = 0$.

   En lokal extrempunkt till f längs randen $g = 1$ löser systemet

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f \text{ och } \operatorname{grad} g \text{ är parallella} \\ g = 1 \end{cases}$$

   Den första ekvationen kan skriva

$$0 = \begin{vmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ x & y/2 \end{vmatrix} = 3xy(x/2 + y)$$

   Detta ger $x = 0$, $y = 0$ eller $x = -2y$. De båda första alternativen ger i $g = 1$ punkterna $(0, \pm 2)$ respektive $(\pm\sqrt{2}, 0)$, där f:s värden är ± 8 respektive $\pm 2\sqrt{2}$.

   Alternativet $x = -2y$ ger i $g = 1$ att $y = \pm 2/3$ och punkterna $(-4/3, 2/3)$ samt $(4/3, -2/3)$ där f:s värde är $-72/27 > -8$ respektive $72/27 < 8$.

   Svar: Största värdet är 8 och minsta är -8.

4. Gränser i y-led är givna. De två kurvorna $y = x$ och $y = x^2$ skär varandra när $x = x^2$, vilket ger $x = 0$ och $x = 1$.

   Integration ger nu

$$\begin{aligned}
\iint_D &= \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} x^2 y \, dy \Big) \, dx = \int_0^1 \Big[x^2 y^2/2 \Big]_{x^2}^{x} \, dx = \int_0^1 \Big(x^4/2 - x^6/2 \Big) \, dx = \\
&= \Big[x^5/10 - x^7/14 \Big]_0^1 = 1/10 - 1/14 = 7/70 - 5/70 = 2/70 = 1/35
\end{aligned}$$

   Svar: $1/35$.

5. Med sfäriska koordinater kan kroppen beskrivas av

$$\begin{cases} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r\cos\theta, \end{cases}$$

   där $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, och $0 \leq \phi \leq \pi/2$, som vi betecknar med E. Massan ges av

$$\begin{aligned}
\iiint_K (x^2 + y^2) z \, dxdydz &= \iiint_r (r^2 \sin^2\theta) r \cos(\theta) r^2 \sin\theta \, dr d\theta \phi = \\
&= (\pi/2) \Big[r^6/6 \Big]_0^1 \Big[\sin^4(\theta)/4 \Big]_0^{\pi/2} = \pi/48.
\end{aligned}$$

   Svar: $\pi/48$.

6. Arbetet ges av $\int_\gamma y\,dx + (2x + e^{-\sin y})\,dy$ där γ är den del av cirkeln med radie 2 och medlepunkt i origo som ligger i övre halvplanet genomlöpt i positiv riktning. Om vi kompleterar γ med det räta linjestyket η från $(-2, 0)$ till $(2, 0)$ är $\gamma + \eta$ den positivt orienterade randen till omrdådet D som utgörs av den del av cirkelskivan med radie 2 och medelpunkt i origo, som ligger i övre halvplanet.

   Greens formel ger

$$\int_\gamma y\,dx + (2x + e^{-\sin y})\,dy + \int_\eta y\,dx + (2x + e^{-\sin y})\,dy = \iint_D (-1 + 2)\,dxdy$$

   Dubbelintegralen är alltså arean av D som är $2^2\pi/2 = 2\pi$.

   Kurvan η parametriseras av $x = t$, $y = 0$ med t från -2 till 2, så kurvintegralen längs η blir 0.

   Svar: 2π.

7. Om vi kompletterar den givna ytan Y med ytan Y_1 som ges av $z = 0$ när (x, y) ligger i enhetscirkeln så är $Y + Y_1$ den positivt orinterade randen till kroppen K som ges av $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ med (x, y) i enhetscirkeln D, under förutsättning att vi orienterar Y_1 med nedåtriktad normal.

   Gauss sats ger att

$$\iint_Y + \iint_{Y_1} = \iiint_K$$

   där trippellintegralen är

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \mathbb{F} \, dxdydz &= 3 \iiint_K 1 \, dxdydz = 3 \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dxdy = \\ &= \{ \text{ polära } \} = 6\pi \left[r^2/2 - r^4/4 \right]_0^1 = 3\pi/2. \end{aligned}$$

   Ytan Y_1 parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$ med (x, y) i D och $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (0, 0, 1)$ vilket ger fel orientiering. Alltså har vi

$$\iint_{Y_1} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = -\iint_D 0 \, dxdy = 0.$$

   Detta ger att det efterfrågade flödet är $3\pi/2$.

   Svar: $3\pi/2$.