Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 13 06 05 (Fysikprogrammet)

1. Riktningsderivatan ges av $f'_{\mathbf{v}}(1,1,1) = \text{grad} f(1,1,1) \cdot \mathbf{v}$, där $\mathbf{v}$ är normeringen av vektorn $(2,-2,1)$, dvs

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2,-2,1) = \frac{1}{3}(2,-2,1).$$

Vidare är

$$\text{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (e^{xy}yz, e^{xy}xz, e^{xy}),$$

som ger $\text{grad} f(1,1,1) = (e,e,e)$. Alltså blir

$$f'_{\mathbf{v}}(1,1,1) = e(1,1,1) \cdot \frac{1}{3}(2,-2,1) = \frac{e}{3}.$$

I punkten $(1,1,1)$ växer funktionen växer snabbast i den riktning som ges av funktionens gradient där. Gradienten i $(1,1,1)$ är (e,e,e) som pekar i riktningen $(1/\sqrt{3})(1,1,1)$.

Svar: $e/3$ respektive $(1/\sqrt{3})(1,1,1)$.

2. En riktningsvektor för tangenten ges av kryssprodukten av de båda ytornas normaler i punkten $(-1,-1,-3)$. Om vi sätter $f(x,y,z) = xy+z+2$ och $g = x^2+yz-4$ så ges de båda ytorna av ekvationerna $f=0$ respektive $g=0$. Därmed har de i punkten (x,y,z) normalerna $\text{grad} f = (y,x,1)$ respektive $\text{grad} g = (2x,z,y)$. I punkten $(-1,-1,-3)$ har vi därför riktningsvektorn

$$\begin{aligned} \text{grad} f(-1,-1,-3) \times \text{grad} g(-1,-1,-3) &= (-1,-1,1) \times (-2,-3,-1) = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right\} = (4,-3,1). \end{aligned}$$

Eftersom tangenten går genom punkten $(-1,-1,-3)$ ger detta att tangenten parameteriseras av $(x,y,z) = (-1+4t, -1-3t, -3+t)$, där t är ett godtyckligt reellt tal.

Svar: $(x,y,z) = (-1+4t, -1-3t, -3+t)$.

3. De stationära punkterna till f löser ekvationen $\mathbf{0} = \text{grad} f = (3x^2+2y-1, 2x+2y)$, vilket ger ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& 3x^2+2y-1 \\ 0 &=& 2x+2y. \end{array} \right.$$

Den andra ekvationen ger $y=-x$, som i den första ger $0 = 3x^2-2x-1 = (x-1)(3x+1)$, med lösningarna $x=1$, som ger $y=-1$, och $x=-1/3$, som ger $y=1/3$.

Funktionen har alltså de stationära punkterna $(1,-1)$ och $(-1/3,1/3)$. För att avgöra karaktären studerar vi f:s kvadratiska form i respektive punkt. Kofficienterna i denna ges av värdena av f''_{xx}, $2f''_{xy}$ samt f''_{yy}.

Vi har

	$(1,-1)$	$(-1/3,1/3)$
$f''_{xx} = 6x$	6	-2
$f''_{xy} = 2$	2	2
$f''_{yy} = 2$	2	2

Det ger i punken $(1,-1)$ den kvadratiska formen $Q = 6h^2+4hk+2k^2 = 4h^2+2(h+k)^2$ som är positivt definit, så $(1,-1)$ är en lokal minpunkt till f.

I punkten $(-1/3, 1/3)$ blir den kvadratiska formen $Q = -2h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(h+k)^2 - 4h^2$ som är indefinit, för (t.ex.) $Q(0,1) > 0$, men $Q(1,0) < 0$. Alltså är $(-1/3, 1/3)$ en sadelpunkt till f.

Svar: De stationära punkterna är $(1, -1)$, som är en lokal minpunkt och $(-1/3, 1/3)$, som är en sadelpunkt.

4. Vi sätter $u = x + y$ och $v = x - y$. Detta ger

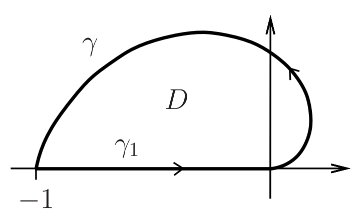
$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{och därför} \quad \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

Variabelbytet ger, där E ges av $-1 \le u \le 2$ samt $-1 \le v \le 2$,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + (x+y)^2}\, dx\, dy &= \iint_E \frac{uv}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot \ln(1+u^2)\right]_{-1}^{2} \cdot \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{-1}^{2} = \\ &= \frac{1}{8}\ln(5/2) \cdot 3 = \frac{3}{8}\ln(5/2). \end{aligned}$$

Svar: $(3/8)\ln(5/2)$.

5. Vi ritar upp kurvan partikeln rör sig längs i planet och kallar den γ. Om vi kompletterar med kurvan γ_1 som utgörs av det räta linjestycket från $(-1, 0)$ till origo, blir $\gamma + \gamma_1$ den positivt orienterade randen ∂D till området D i figuren.



Om vi sätter $P = 2xy + 6x^2$ och $Q = 3y^2 + x^2$ så ges arbetet av kurvintegralen $\int_\gamma P\, dx + Q\, dy$. Greens formel ger

$$\int_\gamma + \int_{\gamma_1} \quad = \quad \int_{\partial D} = \{\text{Green}\} = \iint_D (-P'_y + Q'_x)\, dx\, dy = \iint_D (-2x + 2x)\, dx\, dy = 0.$$

Kurvan γ_1 parameteriseras av $(x, y) = (t, 0)$, där t går från -1 till 0. Vi får därför

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = -\int_{\gamma_1} Px\, dx + Q\, dy = -\int_{-1}^{0} (6t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 0)\, dt = -\Big[2t^3\Big]_{-1}^{0} = -2.$$

Svar: -2.

6. Ytan parameteriseras av $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 2-x^2-y^2)$, där (x,y) ligger i D som ges av $0 \leq x \leq y$ och $x^2+y^2 \leq 2$, som i polära koordinater motsvaras av E som ges av $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ och $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$.

   Massan m ges av ytintegralen

$$m \quad = \quad \iint_Y \rho(x,y,z)\,dS = \iint_D \rho(\mathbf{r}(x,y)) \cdot |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\,dx\,dy.$$

   Vi har $\rho(\mathbf{r}(x,y)) = \sqrt{9-4(2-x^2-y^2)} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$ och

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{array} \right\} = (2x, 2y, 1)$$

   som har beloppet $\sqrt{4x^2+4y^2+1}$.

   Vi får nu

$$\begin{aligned} m \quad &= \quad \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \cdot \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy = \iint_D (1+4x^2+4y^2)\,dx\,dy = \\ &= \quad \{ \text{ Polära } \} = \iint_E (1+4r^2)r\,dr\,dt = \frac{\pi}{4}\Big[r^2/2+r^4\Big]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot (1+4) = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

   Svar: $5\pi/4$.

7. Vi ska minimera $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ under bivilkoret $g(x,y,z) = x^2(y-1)+z^2+8 = 0$. Punkter där f antar sitt minimum på ytan $g=0$ löser ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{grad} f,\ \mathrm{grad} g & \text{är parallella} \\ g = 0. & \end{array} \right.$$

   Första ekvationen kan skrivas

$$\mathbf{0} \quad = \quad \mathrm{grad} f \times \mathrm{grad} g = 2 \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 2x(y-1) & x^2 & 2z \end{array} \right\},$$

   som ger tre ekvationer. Vi ska alltså lösa ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{lll} 0 & = & z(2y-x^2) \\ 0 & = & z(2x-2x(y-1)) = 2xz(2-y) \\ 0 & = & x^3-2xy(y-1) = x(x^2-2y(y-1)) \\ 0 & = & 8+x^2(y-1)+z^2 \end{array} \right.$$

   Den andra ekvationen ger $x=0$, $y=2$, eller $z=0$. Vi ser att $x=0$ liksom $y=2$ ger en ekvation som saknar lösning i den fjärde raden av systemet. Detta ger att vi måste ha $z=0$. Stoppar vi in detta i ekvationsystemet innehåller bara de två nedersta ekvationerna någon information. Vi vet också att $x \neq 0$, så vi kan förenkla den tredje ekvationen. Detta ger

$$\begin{cases} 0 &= x^2 - 2y(y-1) \\ 0 &= 8 + x^2(y-1). \end{cases}$$

Vi ser i andra ekvationen att $y = 1$ inte duger, så vi får $x^2 = -8/(y-1)$ som i den första ger $0 = 8 + 2y(y-1)^2$, där vi ser att $y = -1$ duger.

Vi får nu med faktorsaten

$$0 = 4 + y(y-1)^2 = y^3 - 2y^2 + y + 4 = (y+1)(y^2 - 3y + 4).$$

Men ekvationen $0 = y^2 - 3y + 4 = (y - 3/2)^2 + 7/4$ har inga reella rötter, så $y = -1$ är enda möjligheten. Det ger $x^2 = 4$, så $x = \pm 2$ och sedan tidigare har vi $z = 0$.

Vi får de två punkterna $(\pm 2, -1, 0)$ på ytan som har samma avstånd till origo.

Svar: $(\pm 2, -1, 0)$.