Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 13 08 31 (Fysikprogrammet)

1. En normal till tangentplanet ges av funktionens gradient i punkten. Vi har allmänt

$$\mathrm{grad} f = (3x^2z + 2x, z^3, x^3 + 3yz^2),$$

som ger att $\mathrm{grad} f(1, -1, 1) = (5, 1, -2)$ är en normal till det sökta planet. Den riktning som ges av $(5, 1, -2)$ är dessutom den riktning i vilken funktionen växer snabbast i punkten $(1, -1, 1)$. (Kom ihåg att en riktning har längd 1, så vektorn $(5, 1, -2)$ ska normeras.)

Tangentplanet har därför ekvationen (det går ju genom $(1, -1, 1)$)

$$0 \quad = \quad (5, 1, -2) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 5x + y - 2z - 2.$$

Svar: $2 = 5x + y - 2z$ respektive $(1/\sqrt{30})(5, 1, -2)$ (eller den riktning som ges av $(5, 1, -2)$).

2. De stationära punkterna till f löser ekvationen $\mathbf{0} = \mathrm{grad} f = (3x^2 + 6x - 6y, -6x + 2y)$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 &= 3x^2 + 6x - 6y \\ 0 &= -6x + 2y. \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger $y = 3x$, som i den första ger $0 = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$, med lösningarna $x = 0$, som ger $y = 0$, och $x = 4$, som ger $y = 12$.

Funktionen har alltså de stationära punkterna $(0, 0)$ och $(4, 12)$. För att avgöra karaktären studerar vi f:s kvadratiska form i respektive punkt. Kofficienterna i denna ges av värdena av f''_{xx}, $2f''_{xy}$ samt f''_{yy}.

Vi har

	$(0,0)$	$(4,12)$
$f''_{xx} = 6x + 6$	6	30
$f''_{xy} = -6$	-6	-6
$f''_{yy} = 2$	2	2

Det ger i punken $(0, 0)$ den kvadratiska formen $Q = 6h^2 - 12hk + 2k^2 = 6(h - k)^2 - 4k^2$ som är indefinit, för (t.ex. är $Q(1, 1) < 0$, men $Q(1, 0) > 0$. Alltså är $(0, 0)$ en sadelpunkt till f.

I punkten $(4, 12)$ blir den kvadratiska formen $Q = -30h^2 - 12hk + 2k^2 = 2(k - 3h)^2 + 12h^2$ som är positivt definit. (För att Q ska kunna bli noll måste $h = 0$ och $k - 3h = 0$, vilket ger $h = k = 0$.) Därmed är det klart att punkten $(4, 12)$ är en lokal minpunkt till funktionen.

Svar: De stationära punkterna är $(0, 0)$, som är en sadelpunkt och $(4, 12)$, som är en lokal minpunkt.

3. Vi genomför det föreslagna variabelbytet och får med kedjeregeln att

$$\begin{cases} f'_x &= af'_u \\ f'_y &= 2yf'_u + f'_v \end{cases}$$

som i ekvationen ger $(ay - 4y)f'_u - 2f'_v = x + y$. Vi väljer därför $a = 4$ och har då $x = (u - v^2)/4$ och $y = v$. Detta ger oss ekvationen

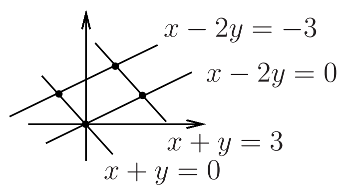
$$-2f'_v = (u - v^2)/4 + v \quad \text{eller} \quad f'_v = -u/8 + v^2/8 - v/2$$

Integration med avseende på v ger $f = -uv/8 + v^3/24 - v^2/4 + g(u)$, där $g(u)$ är en godtycklig funktion av u. Återgång till ursprungliga variabler ger svaret

$$f = -(4x+y^2)y/8 + y^3/24 - y^2/4 + g(4x+y^2) = -xy/2 - y^3/12 - y^2/4 + g(4x+y^2).$$

Svar: $f(x,y) = -xy/2 - y^3/12 - y^2/4 + g(4x+y^2)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

4. Vi gör en figur



och ser att området D beskrivs av $-3 \le x - 2y \le 0$, samt $0 \le x + y \le 3$, vilket leder tankarna till att göra variabelbytet $u = x - 2y$ och $v = x + y$. Området D motsvaras då av en rektangel E som ges av $-3 \le u \le 0$, samt $0 \le v \le 3$. Vi löser ut x och y med hjälp av u och v och får $x = (u+2v)/3$ och $y = (v-u)/3$.

Detta ger

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 1/3.$$

Variabelbytet ger

$$\begin{aligned} \iint_D (x-2y)e^{x+y}\,dx\,dy &= \iint_E ue^v \cdot \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}\cdot u^2\Big]_{-3}^{0} \cdot \Big[e^v\Big]_0^3 = \\ &= -\frac{3}{2}\cdot(e^3-1) = \frac{3}{2}\cdot(1-e^3). \end{aligned}$$

Svar: $3(1-e^3)/2$.

5. Vi sätter D_a, för $a \ge 0$, till den del av ellipsskivan $x^2 + 2y^2 \le a^2$ som ligger i första kvadranten. Dessa mängder bildar en uttömmande svit av delmängder till första kvadranten och vi har därför att vi ska beräkna

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} f(x,y)\,dx\,dy,$$

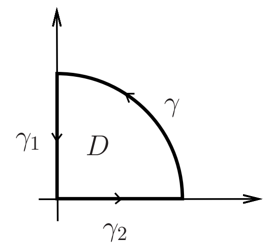
där vi satt $f(x,y) = (1 + x^2 + 2y^2)^2$. Vi gör ett elliptiskt-polärt variabelbyte genom att sätta $x = r\cos t$, $y = (r/\sqrt{2})\sin t$. Då ges D_a motsvaras av området E_a som ges av $0 \le r \le a$ och $0 \le t \le \pi/2$, samtidigt som $d(x,y)/d(r,t) = r/\sqrt{2}$. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_{D_a} f(x,y)\,dx\,dy &= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{E_a}(1+r^2)^{-2}r\,dr\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[-(1+r^2)^{-1}\Big]_0^a = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8}(1-(1+a^2)^{-1}) \to \frac{\sqrt{2}\pi}{8}, \end{aligned}$$

när $a \to \infty$.

Svar: $\sqrt{2}\pi/8$.

6. Vi ritar upp kurvan partikeln rör sig längs i planet och kallar den γ. Om vi kompletterar med kurvan γ_1 som utgörs av det räta linjestycket från $(0, 1)$ till origo, samt med kurvan γ_2 som utgörs av det räta linjestycket från orig till $(1, 0)$, blir $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2$ den positivt orienterade randen ∂D till området D i figuren.



Om vi sätter $P = Q = x^2 + e^{x+y}$ så ges arbetet av kurvintegralen $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$. Greens formel ger

$$\int_\gamma + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \quad = \quad \int_{\partial D} = \{\text{Green}\} = \iint_D (-P'_y + Q'_x)\,dx\,dy = \iint_D 2x\,dx\,dy.$$

Vi beräknar dubbelintegralen genom att gå över till polära koordinater med $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Då är $d(x, y)/d(r, t) = r$ och D motsvaras av området E som ges av $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq t \leq \pi/2$. Detta ger

$$\iint_D 2x\,dx\,dy \quad = \quad \iint_E 2r^2 \cos t\,dr\,dt = \frac{2}{3}\Big[r^3\Big]_0^1 \cdot \Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Kurvan γ_1 parametriseras av $x = 0$, $y = t$, där t går från 1 till 0, så

$$\int_{\gamma_1} \quad = \quad \int_1^0 e^t\,dt = 1 - e.$$

Kurvan γ_2 parametriseras av $x = t$ och $y = 0$, där t går 0 till 1, så

$$\int_{\gamma_2} \quad = \quad \int_0^1 (t^2 + e^t)\,dt = 1/3 + e - 1.$$

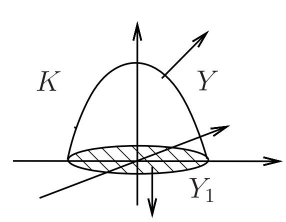
I Greens formel ger detta nu att

$$\int_\gamma + (1 - e) + (1/3 + e - 1) = \frac{2}{3}$$

Vilket ger svaret $\int_\gamma = 1/3$.

Svar: 1/3.

7. Vi kallar den givna ytan för Y med den uppåtriktade normalen $\mathbb{N}$. Flödet ges då av ytintegralen $\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\,dS$.



Vi skissar ytan och ser att om vi lägger till den streckade ytan Y_1 i figuren, med nedåtriktad nomal $(0,0,1)$, så är $Y + Y_1$ den positivt orienterade randen till en kropp K. Det gör att vi kan använda Gauss sats:

$$\iint_y + \iint_{Y_1} = \iiint_K \text{div}\mathbb{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_K (z^2 + 0 + 3z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Kroppen begränsas av $0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$ och att (x,y) ligger i enhetsskivan D. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint_K (z^2 + 0 + 3z^2)\, dx\, dy\, dz &= \frac{4}{3} \iint_D (1 - x^2 - y^2)^3\, dx\, dy = \{\text{Polära koordinater}\} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot 2\pi \frac{1}{8} \Big[-(1 - r^2)^4 \Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

För den plana ytan Y_1 får vi

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}(x,y,0) \cdot (0,0,-1)\, dx\, dy \quad = \quad \int_{Y_1} y\, dx\, dy = 0$$

där den sista likehten följer av symmetriskäl.

Gauss sats ger alltså

$$\iint_Y \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS \quad = \quad \frac{\pi}{3}.$$

Svar: $\pi/3$.

8. (a) Lineráriseringen ges av $L(x,y) = (x-2, y-1) \cdot \text{grad} f(2,1) + f(2,1)$. Vi har $\text{grad} f = (2xy, x^2)$, så $\text{grad} f(2,1) = (4,4)$, vilket ger $L(x,y) = 4x + 4y - 8$.

   Svar: $L(x,y) = 4x + 4y - 8$.

   (b) Funktionen avtar snabbas i den riktning som ges av $-\text{grad} f(2,1) = (-4,-4)$. Riktningen är normeringen av denna vektor dvs $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

   Svar: $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.