Tentamen i MMGF20/LGMA50, 8/6 2015, 08.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Kan funktionen $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ definieras i $(0,0)$ så att funktionen blir kontinuerlig? (2p)

2. Låt $f(x,y,z) = y\sin(x) + e^z - xz^2$.
a) Ta fram ekvationen för tangentplanet till nivåytan $f(x,y,z) = 2$ i punkten $(\pi/2, 1, 0)$. (2p)
b) Ta fram riktningsderivatan längs riktningen $(1,1,1)$ för funktionen f i punkten $(\pi/2, 1, 0)$. (2p)

3. Hitta de största och minsta värdena (om de existerar) av funktionen $f(x,y) = e^{1-x+2y-x^2-y^2}$, definierad i hela planet. (3p)

4. Beräkna integralen $\iiint_V (1+z)\,dx\,dy\,dz$, där V ges av $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ och $0 \leq y \leq x$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (y^2 - e^{\sin(x)})dx + (5x + \sqrt{y^3+1})dy$, där γ är kurvan $x^2+y^2=4$. (3p)

6. Räkna ut flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ ut genom området som begränsas av ytan $z = 1-x^2$ och planen $z=0$, $y=0$ och $y=2$. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b). (1,5p)
b) Visa att en differentierbar funktion är kontinuerlig. (1,5p)
c) Vilken sats kan du hänvisa till för att visa att en funktion är differentierbar, om du inte vill använda definitionen? (1p)

8. Visa att gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i punkten $\mathbf{a}$, och att storleken på den maximala tillväxten är $|\nabla f(\mathbf{a})|$. (3p)