Exempel på skrivuppgift:

Uppgift 2.14: Funktionen $f(x,y)$ är differentierbar i hela $\mathbb{R}^2$ och satisfierar den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

Visa att linjen $3x+y=1$ är en nivåkurva till f.

Lösning: Att $3x+y=1$ är en nivåkurva till f är per definition samma sak som att $f(x,y)$ är konstant när $3x+y=1$. Vi kan parametrisera linjen $3x+y=1$ genom

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1-3t. \end{cases}$$

Uppgiften är då att visa att $f(x(t),y(t)) = f(t,1-3t)$ är konstant. Om vi kan visa att $\frac{d}{dt}f(t,1-3t) = 0$ är vi klara.

Vi tillämpar kedjeregeln: $\frac{d}{dt}f(t,1-3t) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(t,1-3t)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t-1-3t)\cdot(-3) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(t,1-3t) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(t,1-3t)$. Men detta är noll, eftersom vi vet att f uppfyller differentialekvationen $(*)$! Alltså är $f(t,1-3t)$ konstant, och vi har visat att $3x+y=1$ är en nivåkurva till f.