

① Både täljare och nämnare $\rightarrow 0$.

Vi testar två olika vägar:

Längs x -axeln: sätt $y=0$.

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow \pm\infty} \rightarrow \pm\infty \text{ när } x \rightarrow 0$$

Längs y -axeln: sätt $x=0$.

$$\frac{\ln(1)}{y^2} = 0 \rightarrow 0 \text{ när } y \rightarrow 0.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

② Tangentlinjen är vinkelrät mot både ytornas normaler. Vi tar fram dessa.

Eftersom ytorna är givna som nivåytor så ges normalerna av gradienterna.

Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ och $g(x,y,z) = x + y + z$.

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla g = (1, 1, 1).$$

Sätt in punkten $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\nabla f(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (2, 1, -1)$$

$$\nabla g(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1, 1, 1).$$

En riktningsvektor till tangentlinjen ges av:

$$(2, 1, -1) \times (1, 1, 1) = (2, -3, 1).$$

Tangentlinjen ges då av

$$\underline{x(t) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + t(2, -3, 1).$$

③ Vi behåller $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ som ett bivillkor. Då är extrempunkterna lösningar till:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 1 = \lambda \cdot 2y \\ -1 = \lambda \cdot 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

eftersom $\nabla f = (1, 1, -1)$ och $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$.

Vi löser ut $\lambda = \frac{1}{2x}$ ur (1) och sätter in i de andra ekvationerna:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2x} \cdot 2y \\ -1 = \frac{1}{2x} \cdot 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{Detta ger } 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vi har alltså de två kandidatpunkterna

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1). \text{ Detta ger}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ och}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Den första av dessa är då max och den andra är min.

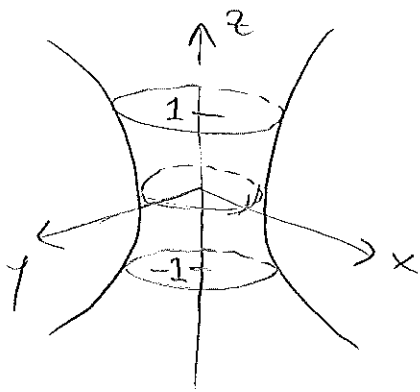
4. Integranden $\rightarrow \infty$ när $x^2 + y^2 \rightarrow 1$.

Vi byter till polära koordinater:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1-r^2} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r}{1-r^2} dr = 2\pi \lim_{a \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{2} \ln(1-r^2) \right]_0^a = \\ &= 2\pi \left(\underbrace{\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \ln(1-r^2)}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\frac{1}{2} \ln(1)}_{=0} \right) = \infty \end{aligned}$$

Alltså är integralen divergent.

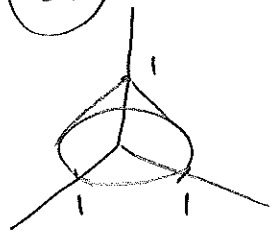
5. Ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ har skivor $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, dvs cirklar kring z -axeln som får större och större radie när $|z|$ ökar. Volymen blir då



$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1+z^2} 1 dx dy \right) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr d\theta dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_{-1}^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz = \pi \int_{-1}^1 (1+z^2) dz = \\ &= \pi \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left(1 + \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{1}{3} \right) \right) = \\ &= \pi \left(2 + \frac{2}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}} \end{aligned}$$

6. Konens yta ges av $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.



Vi vill räkna ut $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$.

Enligt divergenssatsen är detta

samma som $\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz - \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$,

där D är enhetscirkelshivan i xy -planet med nedåt riktad normal, och K är konens inre. Vi har:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 3x^2 + 3y^2 + 1. \quad \text{Så}$$

$$\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz - \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS =$$
$$= \iint_D \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 2 + 3(x^2+y^2) \, dz \, dx \, dy - \iint_D -(z+1) \, dx \, dy =$$

$$= \iint (2 + 3(x^2+y^2))(1-\sqrt{x^2+y^2}) \, dx \, dy + \iint_D 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2+3r^2)(1-r) r \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 2r - 2r^2 + 3r^3 - 3r^4 \, dr + 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left[r^2 - \frac{2r^3}{3} + \frac{3r^4}{4} - \frac{3r^5}{5} \right]_0^1 + \pi =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right) + \pi = \pi \left(3 - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{6}{5} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{30} (3 \cdot 30 - 4 \cdot 10 + 3 \cdot 15 - 6 \cdot 6) =$$

$$= \frac{\pi}{30} (90 - 40 + 45 - 36) = \frac{59\pi}{30}$$

59π/30

7. a) Se bohen sid.

b) Vi har: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin(xy) + xy \cos(xy)$

oh $\frac{\partial P}{\partial y} = \sin(xy) + xy \cos(xy) + 2.$

$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, så F saknar potential enligt a).

8. a) Se bohen sid.

b) Se bohen sid.