

Lösningar Tentan MMGF20
23/8 2016 Elin Grönmark

1. $f(x,y) = \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}_{\text{har denna}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(y)}{y}}_{\rightarrow 1}$
ett gränsvärde i $(0,0)$? när $(x,y) \rightarrow (0,0)$

Vi vet att $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, så
 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ när $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

Alltså är $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2} = 0$,

så f blir kontinuerlig om vi definierar $f(0,0) = 0$.

2. Om $f(x,y) = x e^y + \ln(xy)$ så är

$$f'_x = e^y + \frac{y}{xy} = e^y + \frac{1}{x}$$

$$f'_y = x e^y + \frac{x}{xy} = x e^y + \frac{1}{y}$$

$$f'_x(1,2) = e^2 + 1, \quad f'_y(1,2) = e^2 + \frac{1}{2}$$

Tangentplanet ges av

$$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2),$$

$$\text{dvs } z = e^2 + \ln(2) + (e^2 + 1)(x-1) + (e^2 + \frac{1}{2})(y-2)$$

b.) Vi ser att $(1 - (1-t))^2 - t^2 = 0$,
så närvarande blir $(1-x)^2 - y = 0$.

$$\begin{cases} f'_x = 4x - 2y = 0 & (1) \\ f'_y = -3y^2 - 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) ger $y = 2x$, vi sätter in det i (2):

$$-3 \cdot (2x)^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 2x = 0$$

$$x(6x + 1) = 0 \quad \text{som har lös. } x = 0 \\ x = -\frac{1}{6}.$$

De två lösningarna är då

$(0,0)$ och $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$. Vi tar fram andra-

derivatorna för att avgöra punkternas karaktär.

$$f''_{xx} = 4 \quad f''_{xy} = -2 \quad f''_{yy} = -6y.$$

För $(0,0)$ får vi den kvadratiske formen

$$4h^2 - 4hk = 4\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right) \text{ som är indefinit,}$$

detta en saddelpunkt.

För $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ får vi den kvadratiske formen

$$4h^2 - 4hk + 2k^2 = 4\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right) + 2k^2 =$$

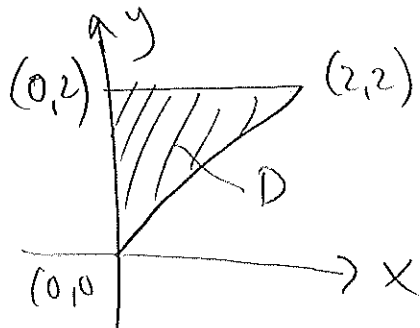
$$= 4\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + k^2, \text{ som är positivt definit,}$$

vilket ger ett lokalt minimum.

4.) Om $f(x,y) = y^2 + 4x$ så är

$$f'_x = 4$$

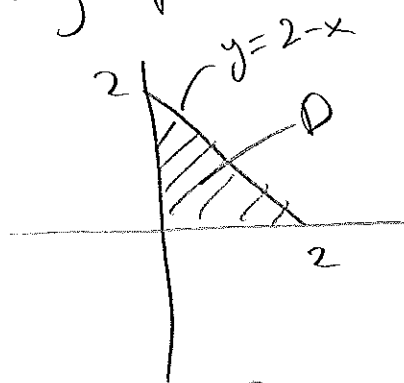
$$f'_y = 2y.$$



Vi ska integrera över området D ,
som har gränserna
 $0 \leq y \leq 1$
 $0 \leq x \leq y$.

Ytan's area blir då $\int_0^1 \int_0^y \sqrt{4^2 + (2y)^2 + 1} \, dx \, dy =$
 $= \int_0^1 \left[x \sqrt{4y^2 + 17} \right]_0^y \, dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 17} \, dy =$
 $= \left[\frac{(4y^2 + 17)^{3/2}}{3/2 \cdot 8} \right]_0^1 = \frac{21^{3/2}}{12} - \frac{17^{3/2}}{12} = \frac{21^{3/2} - 17^{3/2}}{12}$

5) $z = 4 - x^2$ är en yta över xy -planet,
 och $x+y=2$ är ett vertikalt plan som tillsammans
 med koordinatplanen skär ut området D i
 xy -planet. Ytan $z = 4 - x^2$ ligger över
 xy -planet när $(x,y) \in D$. Så



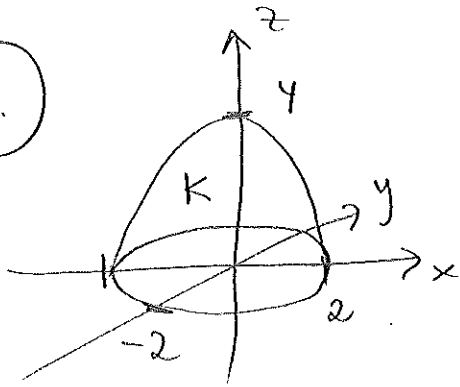
volymen blir: $\iint_D \int_0^{4-x^2} dz \, dx \, dy =$
 $= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-x^2} dz \, dy \, dx =$

$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x^2) \, dy \, dx = \int_0^2 \left[(4-x^2)y \right]_0^{2-x} \, dx =$
 $= \int_0^2 (4-x^2)(2-x) \, dx = \int_0^2 (8-4x-2x^2+x^3) \, dx =$

$$= \left[8x - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 16 - 8 - \frac{16}{3} + 4 =$$

$$= 12 - \frac{16}{3} = \frac{36-16}{3} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$

(6.)



Divergenzsatsen ger att

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz$$

$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, så flödet blir:

$$3 \iiint_K x^2 + y^2 + z^2 \, dx \, dy \, dz = 3 \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} x^2 + y^2 + z^2 \, dz \, dx \, dy$$

om D är skivan $x^2 + y^2 \leq 4$. Detta blir:

$$3 \iint_D \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^{4-x^2-y^2} dx \, dy =$$

$$= 3 \iint_D (x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2) + \frac{(4 - x^2 - y^2)^3}{3} dx \, dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära} \\ \text{koord.} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r^2(4 - r^2) + \frac{(4 - r^2)^3}{3} \right) r \, dr \, d\theta =$$

$$= 6\pi \int_0^2 \left(4r^3 - r^5 + \frac{r(4 - r^2)^3}{3} \right) dr =$$

$$= 6\pi \left[r^4 - \frac{r^6}{6} - \frac{(4 - r^2)^4}{3 \cdot 4 \cdot 2} \right]_0^2 =$$

$$= 6\pi \left(16 - \frac{64}{6} - 0 - \left(0 - 0 - \frac{2^8}{3 \cdot 2^3} \right) \right) =$$

$$= 6\pi \left(16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{3} \right) = \underline{\underline{96\pi}}$$

7. a. Se boken.

b. Vi kollar om fältet är konservativt, i så fall är $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$.

Finns lösning till följande?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+1} - ye^{xy} \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = \arctan(x) - xe^{xy} \quad (2) \end{array} \right.$$

Från (1) får vi $u = y \arctan(x) - e^{xy} + f(y)$

och från (2): $u = y \arctan(x) - e^{xy} + g(x)$.

Så vi kan sätta $f(y) = g(x)$ och få

$u = y \arctan(x) - e^{xy}$ så \mathbb{F} är

konservativt och $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$.

8. Se boken.