Tentamen i MMGF20/LGMA50, 17/3 2015, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Hitta alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. (3p)

2. Ta fram den allmänna lösningen $f(x,y)$ till differentialekvationen (3p)

$$xy\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad x > 0,\ y > 0,$$

med hjälp av variabelbytet

$$\begin{cases} s &= x - y^2/2 \\ t &= x. \end{cases}$$

3. Räkna ut volymen av det område i första oktanten (dvs där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$) som ges av $x + 2y \leq 1$ och $y^2 \geq z$. (3p)

4. Visa att nivåytan $xe^z + zy^2 + \sin(x) = 0$ kan skrivas som en graf $z = f(x,y)$ nära punkten $(0,1,0)$. Beräkna också $f'_x(0,1)$ och $f'_y(0,1)$. (3p)

5. Låt $D = \{(x,y) : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Är den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{x^3} e^{-y/x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergent eller divergent? Beräkna dess värde om den är konvergent. (3p)

6. Låt $\mathbf{F} = (x^2y, x^3/3, xy)$. Räkna ut $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ om kurvan γ ges av skärningen mellan ytan $z = y^2 - x^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$, genomlöpt moturs om vi ser den ovanifrån. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med en potential till ett vektorfält $\mathbf{F}$ i ett område $D \in \mathbb{R}^2$. (1p)
b) Låt $\mathbf{F}$ vara ett vektorfält definierat i hela planet och sådant att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 1$ om γ är enhetscirkeln. Kan $\mathbf{F}$ vara konservativt i hela planet? Varför/varför inte? (1p)
c) Hitta potentialen (om den existerar) till vektorfältet
$\mathbf{F} = (x^2e^y + \cos(x), x^2e^y + 1)$. (2p)

8. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en öppen, bågvis sammanhängande mängd och f en $\mathcal{C}^1$-funktion definierad i D. Visa att om $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{x} \in D$ så är f konstant i D. (3p)