Lösningar Tenta 9/6 2014

MMGF20/LGMA50 Elin Götmark

(1.) $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{3r^3}{r^2} = 3r \to 0$ när $(x,y)\to(0,0)$

där $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Enligt instängningsregeln

är då $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

(2.) Vi vill optimera $f(x,y) = x^2y$ under bivillkoret $g(x,y) = x^2+4y^2 = 6$. Lagranges metod ger att vi ska lösa $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 6 \end{cases}$.

$\nabla f = (2xy, x^2)$

$\nabla g = (2x, 8y)$, dvs $\begin{cases} 2xy = \lambda \cdot 2x \\ x^2 = \lambda \cdot 8y \\ x^2+4y^2 = 6 \end{cases}$

Ur första ekv. får vi antingen $x = 0$ (vilket ger $f = 0$) eller $\lambda = y$. Det senare ger $\begin{cases} x^2 = 8y^2 \\ x^2+4y^2 = 6 \end{cases}$.

$$\Rightarrow 8y^2+4y^2 = 6 \iff y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 4$$

Så $x = \pm 2$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, vilket ger

$$f\left(\pm 2, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 2\sqrt{2}$$

Svar: Funktionens maxvärde är $2\sqrt{2}$ och dess minvärde $-2\sqrt{2}$

(3.) Vi byter variabler med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial y_1} - 2\frac{\partial u}{\partial y_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}$$

Ekvationen blir då: $2\frac{\partial u}{\partial y_1} - 2\frac{\partial u}{\partial y_2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\right) =$

$= 4\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$ som har lösningen

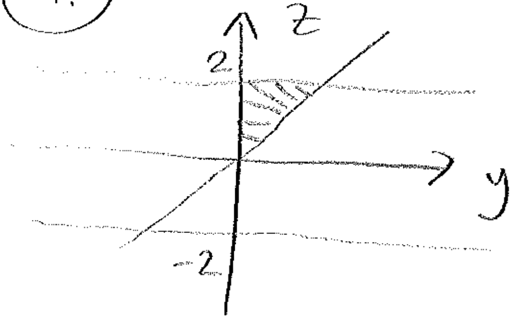
$u = f(y_2) = f(x-2t)$.

Vi vet att $u(x,0) = \sin(x)$, så

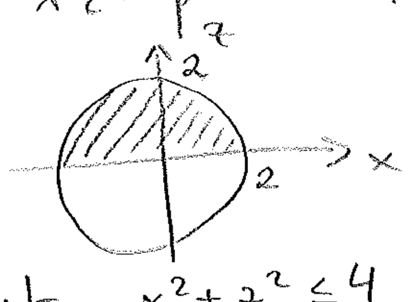
$u(x,0) = f(x-2\cdot 0) = f(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{u(x,t) = \sin(x-2t)}}$

(4.) Skiss av hur området skär yz-planet:



Skiss av hur området skär xz-planet:



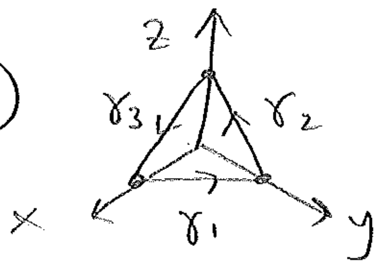
Vi integrerar över området $x^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$, och låter y variera mellan 0 och z:

$$\iint_{\substack{x^2+z^2\le 4\\ z\ge 0}} \left(\int_0^z 1\,dy\right) dx\,dz = \iint_{\substack{x^2+z^2\le 4\\ z\ge 0}} z\,dx\,dz =$$

$$= \begin{Bmatrix}\text{byt till}\\ \text{polära koord.}\end{Bmatrix} = \int_0^{\pi}\int_0^{2} r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(\theta)\,d\theta \int_0^2 r^2\,dr = \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^2 =$$

$$= -(-1-1)\cdot\frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

(5.) 

Lösning 1: Räkna ut kurvintegralen direkt:

Parametrisering av γ_1 : $\mathbb{r}(t) = (1-t, t, 0)$ $0 \le t \le 1$.

$$\int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \big(((1-t)+t^2)\cdot(-1) + (t+0)\cdot 1 + 0\big)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-t^2+2t-1)\,dt = \Big[-\frac{t^3}{3}+t^2-t\Big]_0^1 = -\frac{1}{3}+1-1 = -\frac{1}{3}$$

Parametrisering av γ_2 : $\mathbb{r}(t) = (0, 1-t, t)$ $0 \le t \le 1$.

$$\int_{\gamma_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \big(0 + (1-t+t^2)\cdot(-1) + (t+0)\cdot 1\big)\,dt = -\frac{1}{3}$$

(samma integral)

Parametrisering av γ_3 : $\mathbb{r}(t) = (t, 0, 1-t)$ $0 \le t \le 1$

$$\int_{\gamma_3} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \big((t+0)\cdot 1 + 0 + ((1-t)+t^2)(-1)\big)\,dt = -\frac{1}{3}$$

(samma integral)

Totalt: $-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \underline{\underline{-1}}$

Lösning 2: Stokes sats: $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_Y (\text{rot}\,\mathbb{F})\cdot\mathbb{N}\,dS$

där Y är ytan inuti triangeln i planet

$x+y+z=1$.

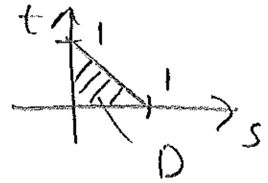
$$\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y^2 \\ y+z^2 \\ z+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2x \\ -2y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Y kan parametriseras med $\mathbb{r}(s,t) = (s, t, 1-s-t)$ (eftersom den ges av grafen $z = 1-x-y$).

$\mathbb{r}'_s = (1, 0, -1)$

$\mathbb{r}'_t = (0, 1, -1)$ $\qquad \mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t = (1, 1, 1)$

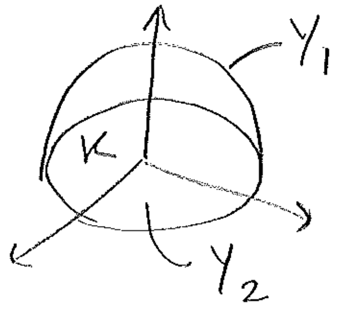
$$\iint_Y (\operatorname{rot} \mathbb{F}) \cdot \mathbb{N}\, dS = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbb{F}) \cdot (\mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t)\, ds\,dt = (*)$$

där D är området 

.

$$= -2 \iint_D \big((1-s-t) + s + t\big)\, ds\,dt = -2 \iint_D ds\,dt =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{-1}}$$ eftersom arean av D är $1/2$.

(6.) 

$K = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$

$Y_1 = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$

$Y_2 = \{z = 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

Divergenssatsen ger: $\iint_{Y_1} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS =$

$$= \iiint_K \operatorname{div} \mathbb{F}\, dx\,dy\,dz - \iint_{Y_2} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\, dS = (*)$$

$\operatorname{div} \mathbb{F} = 2x + 2y + 1$

Så $\iiint_K 2x+2y+1 \, dx\,dy\,dz = \left\{ \begin{matrix} \text{rymdpolära} \\ \text{koord.} \end{matrix} \right\} =$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2r\sin\theta\cos\varphi + 2r\sin\theta\sin\varphi + 1) r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \underbrace{2\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi}_{=0 \text{ pga periodisk funktion}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^1 r^3\,dr + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^2\,dr =$$

$$= 2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = 2\pi(0-(-1)) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\iint_{Y_2} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N}\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbb{F} \cdot (0,0,-1)\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1} z \, dx\,dy = 0$$ eftersom Y_2 parametr. med $(x, y, 0)$ så att $z = 0$.

Så $(*) = \frac{2\pi}{3} - 0 = \underline{\frac{2\pi}{3}}$

7. a. Se Sats 2 i kapitel 9.4 i boken

b. Finns en potential till $\mathbb{F}$?

I så fall gäller $\frac{\partial u}{\partial x} = P = xy + 2x$ dvs

$u = xy + x^2 + f(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + f'(y) = Q = x$ dvs vi kan sätta $f(y) = 0$.

och $u(x,y) = xy + x^2$.

Startpunkt för γ är $\mathbf{r}(0) = (2^0, 3-0) = (1,3)$

Slutpunkt — " — $\mathbf{r}(2) = (2^2, 3-2) = (4,1)$.

Så $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = u(4,1) - u(1,3) =$

$= 4 \cdot 1 + 4^2 - (1 \cdot 3 + 1^2) = 20 - 4 = \underline{\underline{16}}$

8. a. Se Def. 2 i avsnitt 2.2 i boken.

b. Se Sats 2 i — " — .