Lösningar tenta MMGF20
25/8 2015 Elin Götmark

1\. Vi hittar först de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Vi får $x = x^4 \iff x = 0$ eller $x^3 = 1$, dvs $x = 1$.
Så de stationära punkterna är $(0,0)$ och $(1,1)$.
För att avgöra deras karaktär behöver vi andraderivatorna:

$$\begin{cases} f''_{xx} = 6x \\ f''_{xy} = -3 \\ f''_{yy} = 6y \end{cases}$$

$f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 0 \quad f''_{xy}(0,0) = -3$

$f''_{xx}(1,1) = f''_{yy}(1,1) = 6 \quad f''_{xy}(1,1) = -3$

Så andragradsdelen av Taylorutvecklingen kring $(0,0)$ är $Q(h,k) = -6hk$.
Detta är en indefinit kvadratisk form, så $(0,0)$ är en <u>sadelpunkt</u>.

För $(1,1)$ får vi $Q(h,k) = 6h^2 + 6k^2 - 6hk =$
$= 6(h^2 + k^2 - hk) = 6\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right) =$
$= 6\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right)$.

Denna är positivt definit, så $(1,1)$ är en <u>minpunkt</u>.

2. Vi byter variabel i diff. ekvationen:

$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot \frac{1}{y} + f'_v \cdot 0 = f'_u \cdot \frac{1}{y}$

$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_v \cdot 1$

Så $x f'_x + y f'_y = f'_u \cdot \frac{x}{y} - f'_u \cdot \frac{x}{y} + f'_v \cdot y = f'_v \cdot y$,

och ekvationen blir $y \cdot f'_v = x + y$

$\iff f'_v = \frac{x}{y} + 1 = u + 1.$

Lösningen är $f = uv + v + g(u)$,

alltså $f(x,y) = \frac{x}{y} \cdot y + y + g\left(\frac{x}{y}\right) = \underline{x + y + g\left(\frac{x}{y}\right)}.$

Vi vill att lösningen ska uppfylla $f(x,1) = x^2 + x + 1$,

dvs $x + 1 + g\left(\frac{x}{1}\right) = x^2 + x + 1.$

Vi får då $g(x) = x^2$, så vår lösning

blir $\underline{f(x,y) = x + y + \frac{x^2}{y^2}}$.

3. Vi börjar med att räkna ut vad s

och t är när $\mathbf{x} = (x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Vi har $z = \sin(s) = 1$, så $\underline{s = \frac{\pi}{2}}$.

Då är $y = \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \sin(t) = 2\sin(t) = 0$,

så $\underline{t = 0}$.

Normalen till tangentplanet ges av $\mathbf{x}'_s \times \mathbf{x}'_t$.

$\mathbf{x}'_s = \left(-\sin(s)\cos(t), -\sin(s)\sin(t), \cos(s)\right)$

$\mathbf{x}'_t = \left(-(2 + \cos(s))\sin(t), (2 + \cos(s))\cos(t), 0\right)$

Sätt in $(s,t) = (\frac{\pi}{2}, 0)$:

$x'_s(\frac{\pi}{2}, 0) = (-1, 0, 0)$, $x'_t(\frac{\pi}{2}, 0) = (0, 2, 0)$

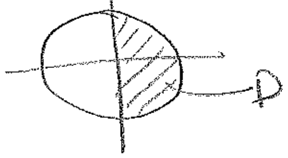
Då är $x'_s(\frac{\pi}{2}, 0) \times x'_t(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Så tangentplanets ekvation är

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (z-1) = 1 - z = 0$$

alltså $\underline{\underline{z = 1}}$.

4. Arean ges av $\iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy$

där  D.

$f'_x = 2x$ $f'_y = -2y$ ger att arean är

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{polära} \\ \text{koordinater} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2}\, dr =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 4r^2 \\ du = 8r\, dr \\ r = 0 \Leftrightarrow u = 1 \\ r = 1 \Leftrightarrow u = 5 \end{array} \right\} = \frac{\pi}{8} \int_1^5 \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{8} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^5 =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}(5\sqrt{5} - 1)}}$$

5. $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_\gamma xy\, dx + e^y\, dy =$

$$= \int_0^1 x(t)\, y(t)\, x'(t) + e^{y(t)}\, y'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^2(1+t^3)\cdot 2t + e^{1+t^3}\cdot 3t^2\,dt =$$

$$= \int_0^1 2t^3 + 2t^6 + 3t^2 e^{1+t^3}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{2t^7}{7}\right]_0^1 + \int_0^1 3t^2 e^{1+t^3}\,dt = \left\{\begin{array}{l} u = 1+t^3 \\ du = 3t^2\,dt \\ t=0 \Leftrightarrow u=1 \\ t=1 \Leftrightarrow u=2 \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \int_1^2 e^u\,du = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \left[e^u\right]_1^2 =$$

$$= \frac{7}{14} + \frac{4}{14} + e^2 - e^1 = \underline{\underline{\frac{11}{14} + e^2 - e}}$$

6. Enligt Stokes sats är

$$\iint_Y \operatorname{rot}(\mathbb{F})\cdot \mathbb{N}\,dS = \int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_{Y_2} \operatorname{rot}(\mathbb{F})\cdot \mathbb{N}\,dS = (*)$$

där γ är enhetscirkeln i xy-planet och Y_2 är enhetsskivan i xy-planet (med uppåt-riktad enhetsnormal).

$$\operatorname{rot}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3y \\ -2xz \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y-(-2x) \\ -2x+0 \\ -2z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ -2x \\ -2z-3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{N} = (0,0,1)$$

$$(*) = -\iint_{Y_2} (2z+3)\,dS = -\iint_{x^2+y^2\le 1} 3\,dx\,dy = (**)$$

om vi parametriserar Y_2 med x och y

(dessutom är $z=0$ på Y_2).

Då är $(**) = -3 \cdot \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{-3\pi}}$

eftersom arean av en cirkelskiva är πr^2.

7. a. Se boken s. 99.

b. — " —

8. Se boken s. 345.