Lösning tenta MMGF20/LGMA50
14/3 2017, Elin Götmark

1) Vi använder kedjeregeln för att få derivatorna i de nya variablerna:

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2f'_u + f'_v$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = -f'_u - f'_v .$$

Vi löser ut x och y ur variabelbytet:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u - 2v . \end{cases}$$

Då blir diffekvationen i de nya variablerna:

$$e^{-v}(2f'_u + f'_v) + 2e^{-v}(-f'_u - f'_v) + 3(u-v) - 2(u-2v) = 0$$

$$-e^{-v}f'_v + u + v = 0$$

$$f'_v = (u+v)e^v$$

Vi integrerar varje sida i v:

$$f = \int (u+v)e^v\,dv = ue^v + \int ve^v\,dv =$$

$$= ue^v + \underbrace{ve^v - \int 1\cdot e^v\,dv}_{\text{från partiell int.}} = (u+v)e^v - e^v + g(u) =$$

$$= (u+v-1)e^v + g(u) =$$

$$= (2x-y+x-y-1)e^{x-y} + g(2x-y) =$$

$$= \underline{\underline{(3x-2y-1)e^{x-y} + g(2x-y)}}$$

2) a.) $z = 2x + xy + y^2 \iff F(x,y,z) = 2x + xy + y^2 - z = 0$

Då är $\nabla F = (2+y, x+2y, -1)$ normal till ytan. $\nabla F(2,-1,3) = \underline{\underline{(1,0,-1)}}$ är alltså normal till ytan i punkten $(2,-1,3)$.

(Extrakoll: $f(2,-1) = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)^2 = 3$, så punkten ligger faktiskt på ytan)

b) Vi får $f'_v(2,-1) = \nabla f(2,-1) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} =$

$= (1,0) \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

normerad riktningsvektor.

$\nabla f(2,-1)$ är de två första komponenterna i $\nabla F(2,-1,3)$.

c.) Kurvan ligger på ytan, vi får den genom att gå genom punkten $(2,-1,3)$ och hålla x konstant och låta y löpa. Riktningsderivatan i denna riktning är densamma som f'_y.

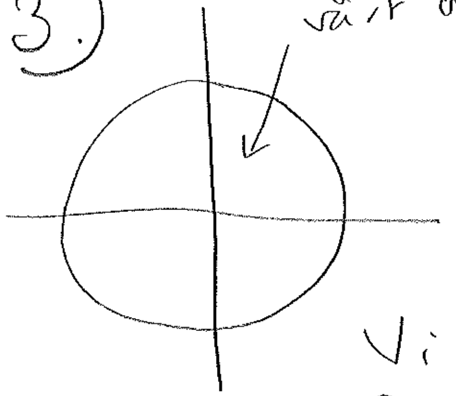
I planet $x=2$ ges den räta linjen då av $z = f'_y(2,-1)\cdot y$.

$f'_y(2,-1) = 0$. Den räta linjen ges alltså av:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (y(t) = 1+t \text{ funkar också})$$

3.)

vårt område, kalla det D.



Vi vet att funktionen antar ett största/minsta värde på D eftersom D är kompakt.

Vi letar först lokala min/max i det inre:

$$\begin{cases} f'_x = e^{-x^2-y^2} + (x+y)\cdot(-2x)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = e^{-x^2-y^2} + (x+y)(-2y)e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Dela m. $e^{-x^2-y^2}$: $1+2x^2+2xy = 0$ (1)

$1+2y^2+2xy = 0$ (2)

(1) − (2) ger: $2x^2 - 2y^2 = 0 \iff y = \pm x$

Sätt in i (1): $2x^2 \pm 2x^2 = -1$

ger antingen $\underset{(\text{när } y=-x)}{0=-1}$ (olösbar) eller $\underset{(\text{när } y=x)}{4x^2=1} \iff x = \pm\frac{1}{2}$

Enda lösningarna är alltså $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}}$

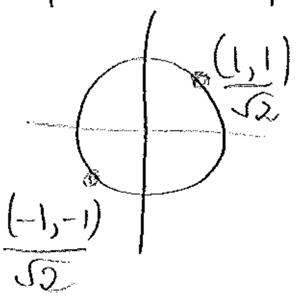
På randen kan vi sätta $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$.

f blir då $(\cos(t)+\sin(t))\cdot e^{-1}$. När har

$g(t) = \cos(t) + \sin(t)$ min/max?

$g'(t) = -\sin(t) + \cos(t) = 0 \iff \sin(t) = \cos(t)$.

Dessa är lika när $t = \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.



$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-1} = \sqrt{2}e^{-1}$

$f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}e^{-1}$

Vi ser att $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ← störst eftersom $e>2$.

och $\sqrt{2}e^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{e}$ Svar: Max: $e^{-\frac{1}{2}}$ Min: $-e^{-\frac{1}{2}}$

4.) Vi gör variabelbytet $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = 2x + y \end{cases}$. De nya gränserna blir då $1 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 0$.

Vad är funktionaldeterminanten?

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

Så $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = -\dfrac{1}{3}$. Vi behöver också lösa ut x och y:

$$\left.\begin{aligned} 2v - u &= 3x \\ 2u - v &= 3y \end{aligned}\right\}.$$

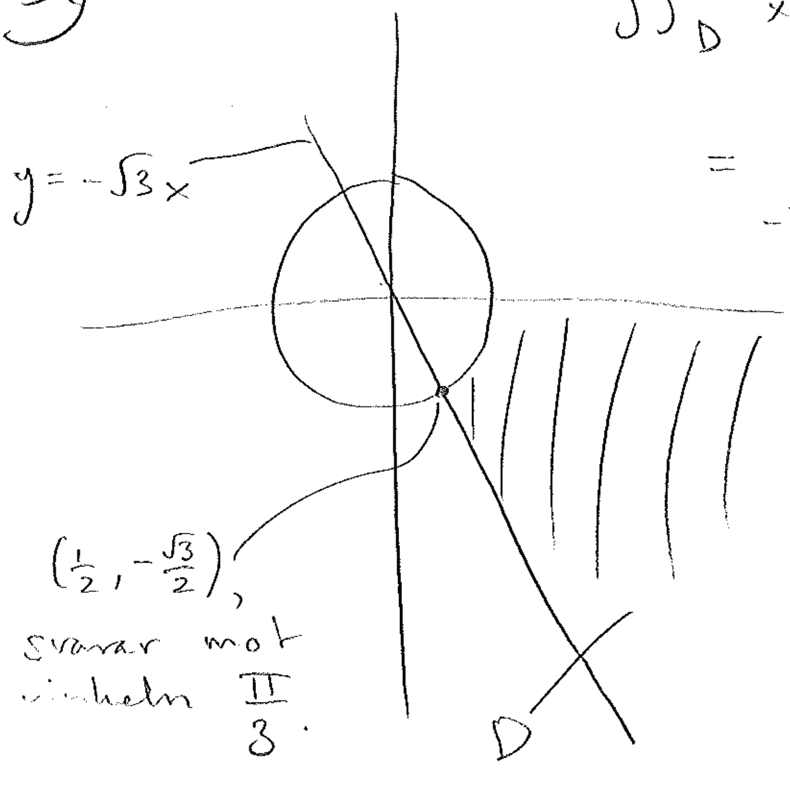
Så $\iint_D 3x + 3y \, dx\, dy =$

$$= \int_1^2 \int_{-1}^0 (\underbrace{2v - u + 2u - v}_{u+v}) \frac{1}{3} \, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_{-1}^0 du = \frac{1}{3}\int_1^2 u - \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(4 - 2 - (1-1)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

5.)



$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

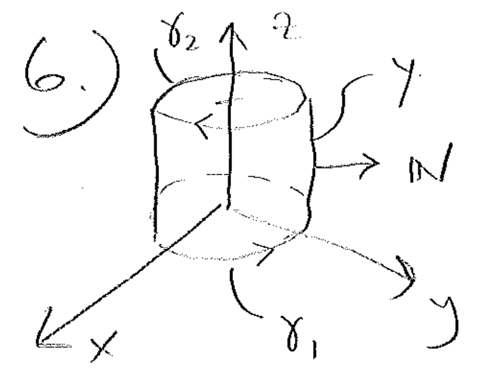
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \int_1^\infty \frac{1}{r^2} \cdot r \, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left[\ln(r)\right]_1^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{3}\Big(\underbrace{\lim_{R\to\infty} \ln(R)}_{=\infty} - \ln(1)\Big)$$

Svar: Divergent.

6.)



$$\iint_Y (\text{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi kan parametrisera γ_1 med $\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, så $\mathbf{r}_1'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$. Då är

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_0^{2\pi} P(\mathbf{r}_1(t)) \cdot (-\sin(t)) + Q(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \cos(t)\, dt.$$

Vi kan parametrisera γ_2 med

$\mathbf{r}_2(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ och gå motsatta vägen runt.

$\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{r}_1'(t)$.

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{2\pi}^{0} P(\mathbf{r}_2(t)) \cdot (-\sin(t) + Q(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \cos(t)\, dt =$$

$= -\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1$ eftersom P och Q bara beror av x och y, och x- och y-komponenterna av $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ är lika. Alltså är $HL = 0$ i ekvationen överst, och vi är klara.

7.) a.) Se

b.) $u(x,y) = x^2 y$ uppfyller $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$.

8.) Se