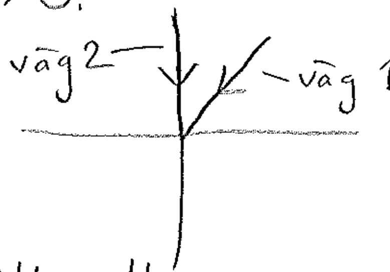
Lösningar Tenta MMGF20

2014-03-14, Elin Gotmark

(1.) f kan definieras i origo om gränsvärdet

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ existerar. Vi väljer två olika vägar in till origo: $\underline{x=y}$: $\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ när $x \to 0$.

$\underline{x=0}$: $\frac{0}{0+y^2} = 0 \to 0$ när $y \to 0$.



Resultatet blir olika, alltså finns inte gränsvärdet, och funktionen kan inte utvidgas till att bli kontinuerlig i origo.

(2.) Vi letar först stationära punkter i $\underline{\text{det inre}}$ av området: $\begin{cases} f'_x = y - 3x^2y^2 = 0 \\ f'_y = x - 2x^3y = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} y(1-3x^2y) = 0 \\ x(1-2x^2y) = 0 \end{matrix}$

$(x,y) = (0,0)$ är uppenbart en lösning. Antag att $y \neq 0$. Då följer $y = \frac{1}{3x^2}$ från första ekv.

Sätt in i ekv. 2: $x\left(1 - \frac{2x^2}{3x^2}\right) = x\left(1-\frac{2}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0$. Men om vi sätter in detta i ekv. 1 så får vi $y=0$, dvs ingen ny lösning.

$\boxed{f(0,0) = 0}$ kandidat till extremvärde.

Nu tittar vi på de fyra bitarna av randen:

$x=-1,\ -1<y<1$: $\quad f(-1,y) = -y+y^2 = g_1(y)$

$g_1'(y) = -1+2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

kandidat: $f(-1,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

$x=1,\ -1<y<1$: $\quad f(1,y) = y-y^2 = g_2(y)$

$g_2'(y) = 1-2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

kandidat: $f(1,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$y=-1,\ -1\le x\le 1$: $\quad f(x,-1) = -x-x^3 = g_3(x)$

$g_3'(x) = -1-3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$ lösn. saknas

$y=1,\ -1\le x\le 1$: $\quad f(x,1) = x-x^3 = g_4(x)$

$g_4'(x) = 1-3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

kandidat: $f(\frac{1}{\sqrt{3}},1) = \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

$f(-\frac{1}{\sqrt{3}},1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

Vi måste också kolla hörnpunkterna:

$f(1,1) = 1-1 = \boxed{0} \qquad f(1,-1) = -1-1 = \boxed{-2}$

$f(-1,1) = -1+1 = \boxed{0} \qquad f(-1,-1) = 1+1 = \boxed{2}$

Max: 2

Min: −2

(3.) Sätt $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$G(x,y,z) = y^2+z^2$

Tangentlinjen är vinkelrät mot både ∇F och ∇G i $(-\sqrt{3}, 0, 1)$.

$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$ $\quad \nabla F(-\sqrt{3}, 0, 1) = (-2\sqrt{3}, 0, 2)$

$\nabla G = (0, 2y, 2z)$ $\quad \nabla G(-\sqrt{3}, 0, 1) = (0, 0, 2)$

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dvs $(0,1,0)$ är en riktningsvektor för tangentlinjen. Linjen kan parametriseras som

$$(x(t), y(t), z(t)) = (-\sqrt{3}, t, 1).$$

(4.) Gör variabelbytet $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-2y \end{cases}$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \implies$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{3}$$ Lös ut x och y: $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2u+v) \\ y = \frac{1}{3}(u-v) \end{cases}$

$$\iint_D xy \, dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{3}(2u+v)\cdot\frac{1}{3}(u-v)\cdot\frac{1}{3} \, dv\,du =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^1 \int^1 2u^2 - uv - v^2 \, dv\,du =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^1 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^1 du =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^1 2u^2 - \frac{u}{2} - \frac{1}{3}\, du = \frac{1}{27}\left[\frac{2u^3}{3} - \frac{u^2}{4} - \frac{u}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}\left(\frac{4-3}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{27 \cdot 12} = \underline{\underline{\frac{1}{324}}}$$

5. Arean är en graf över xz-planet.

Vi parametriserar den så här:

$$\mathbf{r}(s,t) = (s,\ s^2 + t^2,\ t). \qquad s^2 + t^2 \le 1.$$

$$\mathbf{r}'_s = (1, 2s, 0) \qquad \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}'_t = (0, 2t, 1)$$

$$|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| = \sqrt{1 + 4s^2 + 4t^2}$$

$$\text{arean} = \iint_{s^2+t^2 \le 1} \sqrt{1+4s^2+4t^2}\, ds\,dt = \{\text{polära koord.}\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2 \cdot 8}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3 \cdot 2}\left(5^{3/2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)}}$$

6. Ytans kant är $1-(x^2+y^2)^2=0 \Rightarrow$ $x^2+y^2=1$. Enligt Stokes sats kan vi istället integrera över ytan $Y_2: x^2+y^2 \le 1,\ z=0$ som har samma kant. Dess normal är $\mathbb{N}=(0,0,1)$ (ska vara uppåtriktad liksom Y:s normal).

$$\text{rot } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -yz \\ x^2 \\ z+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -y \\ 2x+z \end{pmatrix}$$

$$\iint_{Y_2} (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbb{N}\, dS = \iint_{Y_2} 2x+z\, dS = *$$

Y_2 kan parametriseras med $(x,y,0)$

$$* = \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2x\, dxdy = \begin{Bmatrix} \text{polära} \\ \text{koord.} \end{Bmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta =$$

$= 0$ eftersom $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$.

7. a, b se boken s. 344 och 352

c. Ja. En potential är $\mathcal{U}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

8. Se boken s. 77 – 79.