Tentamen i MMGF20/LGMA50, 10/6 2016, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. a) Räkna ut riktningsderivatan i riktningen $(3, -1)$ till funktionen $f(x, y) = xe^{xy} + x^2y$ i punkten $(1, -2)$. (2p)
   b) I vilken riktning växer funktionen mest i punkten $(1, -2)$? (1p)

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + x + 1$ på området där $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. (4p)

3. Låt $f(x, y) = x\sin(y) + e^{xy}$. Går nivåkurvan $f(x, y) = e^{\pi}$ att skriva som en graf $y = y(x)$ i en omgivning av punkten $(1, \pi)$? Vad är i så fall $y'(1)$? (3p)

4. Bestäm mass-centrum för kroppen K som uppfyller $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \leq 1$ och $z \geq 0$. Densiteten är $\rho(x, y, z) = 1$. x-koordinaten för mass-centrum ges av

$$x_T = \frac{1}{m} \iiint_K x\, dxdydx,$$

   där m är K:s massa, och motsvarande för de andra koordinaterna. (3p)

5. Räkna ut kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (xz, ye^x, e^z)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (1 - t, t, t^2)$, där $0 \leq t \leq 1$. (3p)

6. Räkna ut kurvintegralen

$$\int_\gamma (\ln(1 + x^2) + xy^2)dx + (e^{\sin(y)} + xy^2)dy,$$

   där γ är randen till området där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x + y \leq 1$, genomlöpt i positiv riktning. (3p)

7. Bevisa att om vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett enkelt sammanhängande område Ω, så är kurvintegralen över $\mathbf{F}$ noll för alla slutna kurvor i Ω. (3p)

8. a) Definiera vad som menas med en funktionalmatris till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. (1p)
   b) Definiera vad som menas med en nivåyta till en funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. (1p)
   c) Vilken vektor är ortogonal till den nivåyta av f som går genom punkten (a, b, c)? (1p)