Tentamen i MMGF20/LGMA50, 13/3 2018, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt $f(x,y) = x^2y + xy^2 + x + 2xy$.
   a) Räkna ut ekvationen för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x,y) = -1$ i punkten $(1,-2)$. (2p)
   b) Betrakta nu ytan $z = x^2y + xy^2 + x + 2xy$. Ta fram en ekvation för tangentplanet i punkten $(1,-2,1)$. (1p)
   c) I vilken riktning växer $f(x,y)$ snabbast, om $(x,y) = (1,-2)$? (1p)

2. Hitta de största och minsta värdena av funktionen $f(x,y) = e^{3x - x^3/3 - y^2}$ på området $|y| \leq x$, $0 \leq x \leq 3$, om de existerar. (3p)

3. Lös differentialekvationen $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) + 2f(x,y)$, där $f(x,x) = \sin(x)$. Du kan använda variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. (3p)

4. Beräkna $\iint_D x + y \, dxdy$, där D är parallellogrammet med hörn i $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,2)$ och $(3,1)$. (3p)

5. Bestäm mass-centrum för kroppen K som uppfyller $0 \leq x \leq 1$ och $y^2 + z^2 \leq 1 + x^2$. Densiteten är $\rho(x,y,z) = 1$. x-koordinaten för mass-centrum ges av
$$x_T = \frac{1}{m} \iiint_K x\rho(x,y,z) \, dxdydx,$$
   där m är K:s massa, och motsvarande för de andra koordinaterna. (3p)

6. Räkna ut flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz, yz, y^2)$ upp genom ytan $z = xy$, där $x^2 + y^2 \leq 1$. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har ett lokalt minimum i en punkt $\mathbf{a}$. (1p)
   b) Visa att en differentierbar funktion är kontinuerlig. (2p)

8. a) Visa att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ om vektorfältet (P,Q) är konservativt. (1p)
   b) Visa att vektorfältet $\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$ uppfyller villkoret ovan, men att det ändå inte är konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (2p)