Tentamen i MMGF20/LGMA50, 8/6 2018, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Avgör om funktionen
$$f(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}$$
kan definieras i $(1,0)$ så att den blir kontinuerlig i hela planet. (3p)

2. Låt $f(x,y) = x^3 + xy - y^3$. Hitta f:s alla lokala min och max. (3p)

3. a) Betrakta ytan $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2)$. Visa att
$$\mathbf{r}(t,s) = (\cos(s)(2+\cos(t)), \sin(s)(2+\cos(t)), \sin(t))$$
är en parametrisering av ytan. (1,5p)
b) Beräkna ytans tangentplan i punkten $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. (2,5p)

4. Vi betraktar sfären med radie 2 och centrum i origo. Beräkna arean av den del av sfären som uppfyller att $z \geq 1$. (3p)

5. Beräkna volymen av området (3p)
$$K = \{(x,y,z) : x^2 + z^2 - y^2 \geq -1, x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (y, -x, z^2)$ och γ är skärningen mellan ytorna $z = y^2$ och $x^2+y^2 = 4$, orienterad motsols (dvs mot klockans riktning). (3p)

7. a) Definiera vad som menas med riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ för en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i en punkt $\mathbf{a}$ och i en riktning $\mathbf{v}$. (1p)
b) Formulera kedjeregeln för derivering av sammansättningen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{t})$, där $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2_{\mathbf{t}} \to \mathbb{R}^2_{\mathbf{x}}$ och $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}^2_{\mathbf{u}}$. (1p)
c) Låt $U(x,y) = y - x^3 + 1$. Om vi vet att $\nabla U = \mathbf{F}$ och γ är halvcirkeln i övre halvplanet från $(1,0)$ till $(-1,0)$, vad har då $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ för värde? (1p)

8. Visa att gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning som funktionen f växer snabbast i punkten $\mathbf{a}$, och att storleken på den maximala tillväxten är $|\nabla f(\mathbf{a})|$. (3p)