Lösningar Tenta MMGF20/LGMA50

Elin Götmark 8/6 2018

(1.) Vi kan definiera f i $(1,0)$ så att den blir kontinuerlig där om

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{existerar.}$$

Sätt $(x,y) = (1+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$. När $r \to 0$ så går (x,y) mot $(1,0)$.

$$\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\sin^3\theta \to 0 \quad \text{när } r \to 0.$$

<u>Svar</u>: ja, med $f(1,0) = 0$.

(2.)
$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + y = 0 \\ f'_y &= x - 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y = -3x^2 \\ \text{sätt in i (2):} \\ x - 3\cdot 9x^4 = 0 \\ x(1-27x^3) = 0 \end{array}$$

Så vi har $x = 0$ eller $x = \frac{1}{3}$. De stationära punkterna är då $(0,0)$ och $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = 1 \qquad f''_{xy} = -6y.$

<u>$(0,0)$</u>: $Q(h,k) = 2hk$ som är indefinit, och alltså är $(0,0)$ en <u>sadelpunkt</u>.

<u>$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$</u>: $Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 =$

$$= 2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right) = 2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right).$$

Q är positivt definit och $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ är ett <u>lokalt min</u>.

3. a. Vi sätter in parametriseringen för att se om den uppfyller ytans ekvation:

$VL = \left(\cos^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(t) + 3\right)^2 = \left((2+\cos(t))^2 + \sin^2(t) + 3\right)^2 =$

$= \left(4 + 4\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + 3\right)^2 =$

$= \left(8 + 4\cos(t)\right)^2 = 16\left(2+\cos(t)\right)^2$

$HL = 16\left(\cos^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(s)(2+\cos(t))^2\right) =$

$= 16\left(2+\cos(t)\right)^2.$ $VL = HL$, så vi är klara

b. $x'_t = \left(\cos(s)\cdot(-\sin(t)), \sin(s)\cdot(-\sin(t)); \cos(t)\right)$

$x'_s = \left(-\sin(s)(2+\cos(t)), \cos(s)(2+\cos(t)), 0\right)$

Vad är s och t när $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$?

$\sin(t) = 0$, så $t = 0$ eller $t = \pi$.

Då är antingen $\cos(t) = 1$ eller $\cos(t) = -1$.

Om vi väljer $t = \pi$ får vi $\begin{cases} \cos(s) = \sqrt{3}/2 \\ \sin(s) = \sqrt{3}/2, \end{cases}$

så då är $s = \frac{\pi}{4}$.

Om vi väljer $t = 0$ blir $\begin{cases} \cos(s) = 1/2\sqrt{3} \\ \sin(s) = 1/2\sqrt{3}, \end{cases}$ vilket

inte är lösbart eftersom $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{4\cdot 3} < 1.$

Alltså är $(t, s) = \left(\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. Så

$x'_t\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(0), \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(0), -1\right) = (0, 0, -1)$

$x'_s\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(2-1), 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Normalen ges då av $x'_t(\pi, \frac{\pi}{4}) \times x'_s(\pi, \frac{\pi}{4}) =$

$= (0,0,-1) \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

och tangentplanet ges av:

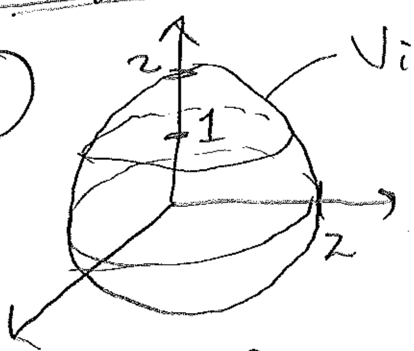
$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) \cdot (x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}, z) = 0$

$\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \sqrt{3}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

$\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

$\underline{x + y = \sqrt{3}}$

4.



Vi ska beräkna arean av "locket". Låt D vara cirkelskivan i xy-planet som ligger rakt under "locket". Vad är dess radie? Sätt $z = 1$. Sfärens ekvation blir då: $x^2 + y^2 + 1^2 = 2^2 \iff x^2 + y^2 = 3$. Så D:s radie är $\sqrt{3}$. Vi använder parametriseringen $x(s,t) = (s, t, \sqrt{4 - s^2 - t^2})$, $(s,t) \in D$. Arean blir då:

$$\iint_D |x'_s \times x'_t| \, ds\,dt = I$$

$x'_s = (1, 0, -\frac{s}{\sqrt{4-s^2-t^2}})$ $\quad x'_t = (0, 1, -\frac{t}{\sqrt{4-s^2-t^2}})$

$x'_s \times x'_t = (\frac{s}{\sqrt{4-s^2-t^2}}, \frac{t}{\sqrt{4-s^2-t^2}}, 1)$.

$$I = \iint_{s^2+t^2 \le 3} \left(\frac{s^2+t^2}{4-s^2-t^2} + 1\right)^{1/2} ds\,dt =$$

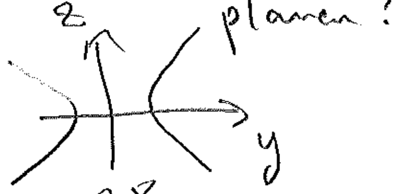
$$= \iint_{s^2+t^2\le 3} \left(\frac{4}{4-s^2-t^2}\right)^{1/2} ds\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \left[-2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = -4\pi(1-2) = \underline{\underline{4\pi}}$$

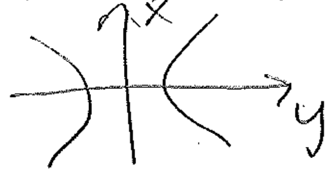
5. Vi listar först ut hur området ser ut.

Sätt $x^2+z^2-y^2=-1$. Vad händer i koordinatplanen?

$\underline{x=0}$: $y^2-z^2=1$ Detta är en hyperbel:

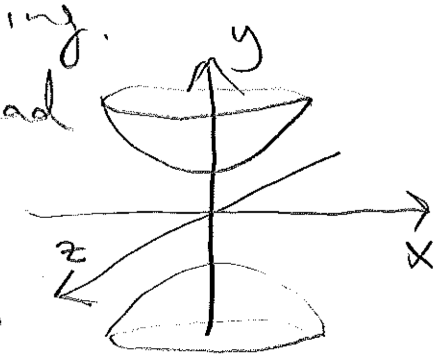


$\underline{z=0}$: $y^2-x^2=1$ — " —



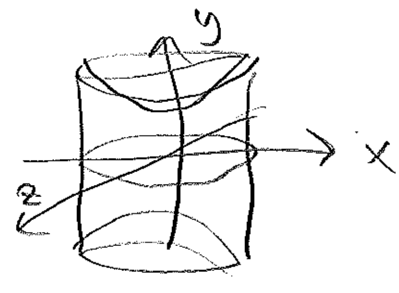
$\underline{y=0}$: $x^2+z^2=-1$. Saknar lösning.

Ytan blir alltså en tvåmantlad hyperboloid:



Origo uppfyller att $x^2+z^2-y^2\ge -1$, så området ligger mellan ytorna.

Vi ska alltså beräkna volymen av:



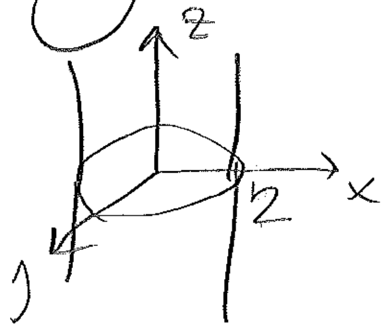
Som blir: $2\iint_{x^2+z^2\le 1} \sqrt{x^2+z^2+1}\,dx\,dz =$

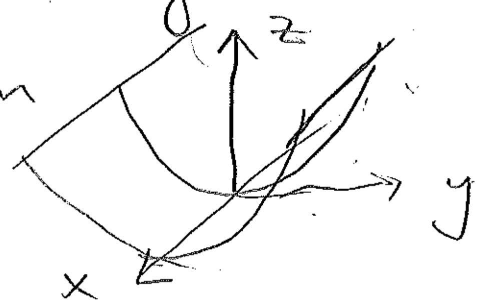
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr\,d\theta = 4\pi\left[(r^2+1)^{3/2}\cdot\frac{1}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}}.$$

6.) Kurvan är skärningen mellan cylindern

och ytan





Kurvan skulle kunna parametriseras med

$\mathbb{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 4\sin^2(t))$, så

$\mathbb{r}'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 8\sin(t)\cos(t))$.

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} (2\sin(t), -2\cos(t), 16\sin^4(t)) \cdot$

$\cdot (-2\sin(t), 2\cos(t), 8\sin(t)\cos(t))\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-4\sin^2(t) - 4\cos^2(t)}_{=-4} + 128\sin^5(t)\cos(t)\, dt =$

$= \left[-4t + 128 \cdot \sin^6(t) \cdot \frac{1}{6}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-8\pi}}$.

<u>Alternativ lösning</u>: med Stokes sats:

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_Y (\mathrm{rot}(\mathbb{F})) \times \mathbb{N}\, dS = \iint_D \mathrm{rot}(\mathbb{F}) \times (\mathbb{r}_s' \times \mathbb{r}_t')\, ds\, dt$

där $D = \{s^2 + t^2 \leq 4\}$ och $\mathbb{r}(s,t) = (s, t, t^2)$.

$\mathrm{rot}(\mathbb{F}) = (0, 0, -1-1) = (0, 0, -2)$.

$\mathbb{r}_s' = (1, 0, 0) \quad \mathbb{r}_t' = (0, 1, 2t) \quad \mathbb{r}_s' \times \mathbb{r}_t' = (0, -2t, 1)$.

Så $I = \iint_{s^2+t^2 \leq 4} -2\, ds\, dt = -2 \cdot \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{-8\pi}}$

7. a. $f'_{v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

b) $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

där f' är funktionalmatrisen till f.

c) $\int_{\gamma} F \cdot dr = u(-1,0) - u(1,0) =$

$= (0 - (-1)^3 + 1) - (0 - 1^3 + 1) = \underline{\underline{2}}$

8. Se sats 7 i boken.