Lösningar MMGF20 tenta 9/6 2017

Elin Götmark

1. Vi provar två olika vägar!

$x=0$: $\dfrac{x^2}{\sin(x^2+y^2)} = \dfrac{0}{\sin(0+y^2)} = 0 \to 0$ när $y \to 0$.

$y=0$: $\dfrac{x^2}{\sin(x^2+y^2)} = \dfrac{x^2}{\sin(x^2)} \to 1$ när $x \to 0$.

Eftersom det blir olika resultat längs olika vägar in mot origo existerar inte gränsvärdet.

2. a. När $(s,t) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ är $\mathbf{r} = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathbf{r}_0$

$\mathbf{r}'_s = (\cos(s), -\sin(s)\sin(t), 0)$

$\mathbf{r}'_t = (0, \cos(s)\cos(t), -\sin(t))$.

$\mathbf{r}'_s(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ — Dessa spänner upp tangentplanet

$\mathbf{r}'_t(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ —

Då är normalen till tangentplanet

$$(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) \times (0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0) = \mathbf{n}$$

Tangentplanets ekvation blir då:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (\tfrac{1}{2}, 0, 0) \cdot (x-1, y-0, z-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

dvs $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \iff \underline{\underline{x = 1}}$.

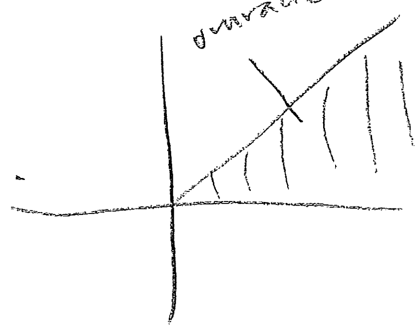
b. Den andra ytan har normalen $(2, 3y^2, -2z)$. I punkten $(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ blir detta $(2, 0, -\sqrt{2})$. Tangentlinjen är ortogonal mot båda ytornas normaler, alltså är tangentens riktningsvektor

$$\left(\tfrac{1}{2},0,0\right)\times\left(2,0,-\sqrt{2}\right)=\left(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

Alltså ges tangentlinjen av

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

3. $$f(x,y) = \underbrace{(x-y)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{när } y \leq x}}\underbrace{e^{-2x-y}}_{>0} \geq 0.$$



Alltså är $f(x,y)$ som minst $=0$, vilket sker t ex i $\underline{f(0,0)=0}$. Finns ett största värde? Vi ser att $\frac{x-y}{e^{2x+y}} \to 0$ när $r\to\infty$ i vårt område

Därför måste ett max finnas i snittet mellan vårt område och en boll (vilket är ett kompakt område). Vi letar därför stationära punkter:

$$f'_x = e^{-2x-y} - 2(x-y)e^{-2x-y} = (1-2x+2y)e^{-2x-y} = 0$$

$$f'_y = -e^{-2x-y} - (x-y)e^{-2x-y} = (-1-x+y)e^{-2x-y} = 0$$

Vi får $\begin{cases} 2x-2y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$

Saknar lösning! Max måste då finnas längs linjen $y=0$ (längs linjen $y=x$ är $f=0$).

Sätt $g(t) = f(t,0) = te^{-2t}$.

$g'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t} = (1-2t)e^{-2t} = 0$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Så max i området är

$$f(\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{2}e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2e}}}.$$

(4.) Vi använder parametriseringen $\mathbf{r}(s,t) = (s, t, 2s+2t)$ över området $s^2+t^2 \le 1$. Då är arean

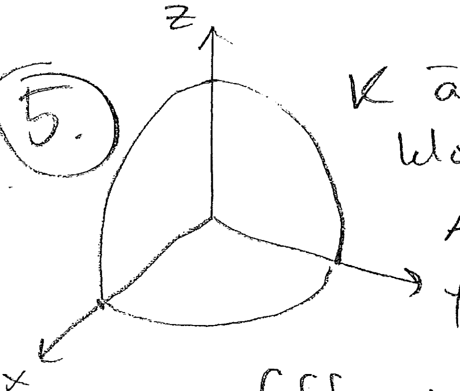
$$\iint_{s^2+t^2\le 1} |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|\, ds\,dt = (*)$$

$\mathbf{r}'_s = (1,0,2)$ och $\mathbf{r}'_t = (0,1,2)$.

$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (1,0,2)\times(0,1,2) = (-2,-2,1)$.

$|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$.

$$\text{Så } (*) = \iint_{s^2+t^2\le 1} 3\, ds\,dt = 3\cdot \underbrace{\cancel{2}\pi}_{\text{enhetsskivans area}} = \underline{\underline{\overset{3}{\cancel{6}}\pi}}$$



(5.) K är den del av enhetsklotet som ligger i första kvadranten. Av symmetriskäl är $x_T = y_T = z_T$.

$$m = \iiint_K dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-0+1) = \frac{\pi}{6}$$

Så $x_T = \frac{6}{\pi} \cdot \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta \cos\varphi \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr =$

$= \frac{6}{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2\theta}_{=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)} \, d\theta =$

$= \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$. Masscentrum är alltså

$\underline{\underline{\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)}}$.

(6.) Vi använder Stokes sats:

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_Y \operatorname{rot} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = (*)$, där Y är ytan $x+y+z$ med $x^2+y^2+z^2 \le 1$. $\operatorname{rot} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} =$

$= (-1,-1,-1)$. Ytans normal är

$\mathbb{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, så $(*) = \iint_Y \frac{1}{\sqrt{3}}(-1-1-1) \, dS =$

$= -\sqrt{3} \iint_Y dS = -\sqrt{3} \cdot$ ytans area $= -\sqrt{3}\pi$ eftersom Y är en cirkelskiva med radie 1.

(7.) Vi vill beräkna $\int_\gamma x\,dx + y\,dy$ där γ är enhetscirkeln.

<u>Metod 1</u>: Vi parametriserar γ:

$\mathbb{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. $\mathbb{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$,

$0 \le t \le 2\pi$.

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t) \, dt = 0$.

Metod 2: $\mathbb{F}$ har en potential $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ i $\mathbb{R}^2$.
(eftersom $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = y$). Då är

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = u(1,0) - u(1,0) = 0$ eftersom

kurvan är sluten.

Metod 3: Greens formel: $\mathbb{F}$ är definierad i hela planet. Så $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} =$

$$= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\,dy = \iint_D 0 - 0 \, dx\,dy = 0.$$

8. Se boken. (Sats 5, kapitel 2)