Tentamen i MMGF20/LGMA50, 25/8 2015, 08.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Hitta alla lokala extrempunkter och sadelpunkter till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. (3p)

2. Lös differentialekvationen $xf'_x + yf'_y = x + y$ där $y > 0$, med hjälp av variabelbytet $u = x/y$, $v = y$. Bestäm sedan den lösning som uppfyller villkoret $f(x, 1) = x^2 + x + 1$. (3p)

3. Bestäm ekvationen för tangentplanet till torusen
$$(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = ((2 + \cos(s))\cos(t), (2 + \cos(s))\sin(t), \sin(s))$$
i punkten $(x, y, z) = (2, 0, 1)$. Definitionsmängden för ytan är $0 \le s \le 2\pi$, $0 \le t \le 2\pi$. (3p)

4. Beräkna arean av ytan som ges av $f(x, y) = x^2 - y^2$ över området $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (xy, e^y)$ och γ är kurvan som ges av $\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 + t^3)$ där $0 \le t \le 1$. (3p)

6. Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$, där $\mathbf{F} = (3y, -2xz, x^2 - y^2)$, Y är övre halvan av enhetssfären och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på sfären. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x, y)$ har ett lokalt maximum i en punkt (a, b). (1,5p)
b) Visa att om $f(x, y)$ har ett lokalt maximum i (a, b) och f är partiellt deriverbar i (a, b), så är f:s partiella derivator noll i (a, b). (1,5p)

8. Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt vektorfält med potential U i ett öppet område $D \subset \mathbb{R}^2$, och låt γ vara en kurva i D som börjar i $\mathbf{a}$ och slutar i $\mathbf{b}$. Visa att (3p)
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}).$$