Tentamen i MMGF20/LGMA50, 15/3 2016, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Räkna ut följande gränsvärde, om det existerar: (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x)}{x^2+y^2}.$$

2. Bestäm tangentlinjen i punkten $(1, 1/2, 1/2)$ till kurvan som ges av skärningen av ytorna $x^2+y^2-z^2=1$ och $x+y+z=1$. (3p)

3. Bestäm de största och minsta värdena av funktionen $f(x,y,z)=x+y-z$ på ytan $x^2+y^2+z^2=1$. (3p)

4. Avgör om den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{1}{1-x^2-y^2}\,dxdy,$$

där $D=\{x^2+y^2\leq 1\}$, är divergent eller konvergent. Räkna ut dess värde om den är konvergent. (3p)

5. Räkna ut volymen av området som ges av $-1\leq z\leq 1$ och $x^2+y^2-z^2\leq 1$. (3p)

6. Låt K vara konen vars bas är enhetsskivan i xy-planet och vars spets är i $(0,0,1)$. Räkna ut flödet av vektorfältet $\mathbb{F}=(x+y^2, 3x^2y+y^3-x^3, z+1)$ upp genom den koniska ytan (konens botten är inte inkluderad). (3p)

7. a) Visa att om vektorfältet $F=(P,Q)$ i $\mathbb{R}^2$ har en potential av klass $\mathcal{C}^2$, så är (2p)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

b) Hitta en potential till vektorfältet $F=(y\sin(xy)+2y, x\sin(xy)+2)$, eller visa att F inte har någon potential. (2p)

8. a) Definiera vad som menas med en partiell derivata till en funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. (1p)
b) Visa att en funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ som är differentierbar också är partiellt deriverbar. (2p)