Tentamen i MMGF20/LGMA50, 23/8 2016, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Avgör om funktionen
$$f(x,y) = \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2}$$
kan definieras i origo så att den blir kontinuerlig där. (3p)

2. a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = xe^y + \ln(xy)$ i punkten $(1,2)$. (2p)
b) Betrakta den parametriserade kurvan $(x(t), y(t)) = (1-t, t^2)$ där $t \in \mathbb{R}$. Uttryck kurvan som en nivåkurva $f(x,y) = 0$ istället. (1p)

3. Hitta de stationära punkterna till funktionen $f(x,y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$ och avgör om de är maxpunkter, minpunkter eller sadelpunkter. (3p)

4. Beräkna arean av den del av ytan $z = y^2 + 4x$ som ligger ovanför triangeln i xy-planet med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$ och $(2,2)$. (3p)

5. Räkna ut volymen av området som begränsas av ytorna $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. (3p)

6. Låt K vara kroppen som begränsas av ytorna $z = 4 - x^2 - y^2$ och $z = 0$. Beräkna flödet ut ur K, dvs
$$\iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \mathbf{N} \, dS,$$
om $\mathbb{F} = (x^3, y^3, z^3)$. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med att ett vektorfält $\mathbb{F}$ har en potential i ett öppet område Ω i $\mathbb{R}^2$. (1p)
b) Låt $\mathbb{F} = (\frac{y}{x^2+1} - ye^{xy}, \arctan(x) - xe^{xy})$ och låt γ vara en godtycklig sluten enkel kurva i planet. Beräkna $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$. (2p)

8. a) Definiera vad som menas med en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b). (1p)
b) Bevisa att om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ har längd 1, så gäller att $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{v}$. (2p)