Tentamen i MMGF20/LGMA50, 14/3 2017, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Lös differentialekvationen $e^{y-x}f'_x+2e^{y-x}f'_y+3x-2y=0$, där $f=f(x,y)$, med hjälp av variabelbytet $u=2x-y$, $v=x-y$. (3p)

2. Låt $f(x,y)=2x+xy+y^2$.
a) Ta fram en normal till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(2,-1,3)$. (1p)
b) Ta fram riktningsderivatan längs riktningen $(1,1)$ för funktionen f i punkten $(x,y)=(2,-1)$. (1p)
c) Vilken rät linje är tangent till kurvan $\mathbf{r}(t)=(2,1+t,f(2,1+t))$, $t\in\mathbb{R}$, i punkten $(2,-1,3)$? (2p)

3. Hitta de största och minsta värdena (om de existerar) av funktionen $f(x,y)=(x+y)e^{-x^2-y^2}$ på området $x^2+y^2\le 1$. (3p)

4. Beräkna $\displaystyle\iint_D 3x+3y\,dxdy$, där D är det område som ges av $1\le x+2y\le 2$ och $-1\le 2x+y\le 0$. (3p)

5. Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent:
$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy,$$
där D ges av villkoren $y\le 0$ och $y+\sqrt{3}x\ge 0$ och $x^2+y^2\ge 1$. Ange integralens värde om den är konvergent. (3p)

6. Låt Y vara ytan $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 1$ och låt normalen $\mathbf{N}$ peka utåt. Visa att
$$\iint_Y(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS=0$$
om $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ är ett vektorfält där P och Q inte beror av z. (3p)

7. a) Antag att vektorfältet $\mathbf{F}=(P,Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ i ett område Ω i planet som saknar hål. Visa att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ för alla slutna kurvor γ i Ω. (2p)
b) Ange en potential till vektorfältet $(2xy,x^2)$. (1p)

8. Visa att gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i punkten $\mathbf{a}$, och att storleken på den maximala tillväxten är $|\nabla f(\mathbf{a})|$. (3p)