Lösningar Tenta MMGF20/LGMA50

15/3 2016 Elin Götmark

1. Både täljare och nämnare $\to 0$.

Vi testar två olika vägar:

Längs x-axeln: sätt $y=0$.

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \pm\infty} \to \pm\infty \text{ när } x \to 0$$

Längs y-axeln: sätt $x=0$.

$$\frac{\ln(1)}{y^2} = 0 \to 0 \text{ när } y \to 0.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

2. Tangentlinjen är vinkelrät mot båda ytornas normaler. Vi tar fram dessa. Eftersom ytorna är givna som nivåytor så ges normalerna av gradienterna.

Sätt $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ och $g(x,y,z) = x+y+z$.

$\nabla f = (2x, 2y, -2z)$

$\nabla g = (1,1,1)$.

Sätt in punkten $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$\nabla f(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (2, 1, -1)$

$\nabla g(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1,1,1)$.

En riktningsvektor till tangentlinjen ges av:

$(2,1,-1) \times (1,1,1) = (2,-3,1)$.

Tangentlinjen ges då av
$x(t) = (1, 1/2, 1/2) + t(2, -3, 1)$.

(3.) Vi betraktar $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ som ett bivillkor. Då är extrempunkterna lösningar till:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 1 = \lambda \cdot 2y \\ -1 = \lambda \cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \end{cases}$$

eftersom $\nabla f = (1,1,-1)$ och $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$. Vi löser ut $\lambda = 1/2x$ ur (1) och sätter in i de andra ekvationerna:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2x} \cdot 2y \\ -1 = \frac{1}{2x} \cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = -z \\ x^2+y^2+z^2 = 1. \end{cases}$$

Detta ger $3x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vi har alltså de två kandidatpunkterna $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Detta ger

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{och}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Den första av dessa är då max och den andra är min.

(4.) Integranden $\to \infty$ när $x^2+y^2 \to 1$.
Vi byter till polära koordinater:

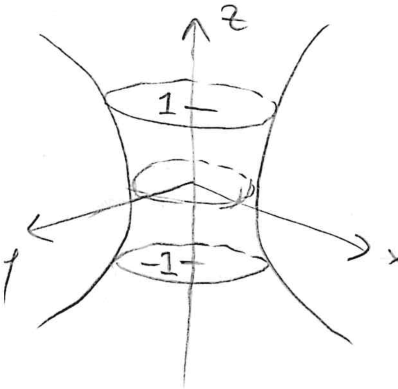
$$\iint_D \frac{1}{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1-r^2}\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r}{1-r^2}\,dr = 2\pi \lim_{a\to 1^-}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\right]_0^a =$$

$$= 2\pi\Big(\underbrace{-\lim_{a\to 1^-}\frac{1}{2}\ln(1-r^2)}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1)}_{=0}\Big) = \infty$$

Alltså är integralen divergent.

(5.) Ytan $x^2+y^2-z^2=1$ kan skrivas
$x^2+y^2=1+z^2$, dvs cirklar kring z-axeln
som får större och större radie när
$|z|$ ökar. Volymen blir då



$$\int_{-1}^{1}\Big(\iint_{x^2+y^2\le 1+z^2} 1\,dx\,dy\Big)\,dz =$$

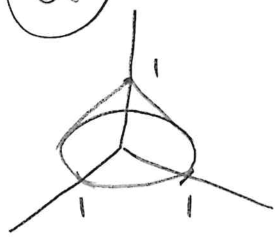
$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz = \pi\int_{-1}^{1}(1+z^2)\,dz =$$

$$= \pi\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left(1+\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\left(2+\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}}$$

(6.) Konens yta Y ges av $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.



Vi vill räkna ut $\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS$.

Enligt divergenssatsen är detta samma som $\iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz - \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS$, där D är enhetscirkelskivan i xy-planet med nedåtriktad normal, och K är konens inre. Vi har:

$\operatorname{div}\mathbb{F} = 1 + 3x^2 + 3y^2 + 1$. Så

$$\iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz - \iint_D \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS =$$

$z=0$ i D

$$= \iint_D \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 2+3(x^2+y^2)\,dz\,dxdy - \iint_D -(z+1)\,dxdy =$$

$$= \iint (2+3(x^2+y^2))(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy + \iint_D 1\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2+3r^2)(1-r)\,r\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 2r - 2r^2 + 3r^3 - 3r^4\,dr + 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left[r^2 - \frac{2r^3}{3} + \frac{3r^4}{4} - \frac{3r^5}{5}\right]_0^1 + \pi =$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) + \pi = \pi\left(3 - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{30}\left(3\cdot 30 - 4\cdot 10 + 3\cdot 15 - 6\cdot 6\right) =$$

$$= \frac{\pi}{30}(90 - 40 + 45 - 36) = \underline{\underline{\frac{59\pi}{30}}}$$

7. a. Se bakom sid.

b. Vi har: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy)$

och $\frac{\partial P}{\partial y} = \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, så $\mathbb{F}$ saknar potential enligt a).

8. a. Se bakom sid.

b. Se bakom sid.