Lösningar Tenta MMGF20

23/8 2016 Elin Götmark

1. $$f(x,y) = \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}}_{\text{har denna ett gränsvärde i }(0,0)\,?} \cdot \underbrace{\frac{\sin(y)}{y}}_{\to 1 \text{ när } (x,y)\to(0,0)}$$

Vi vet att $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$, så

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \text{ när } (x,y)\to(0,0).$$

Alltså är $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} = 0$,

så f blir kontinuerlig om vi definierar $f(0,0)=0$.

2. a) Om $f(x,y) = xe^y + \ln(xy)$ så är

$$f'_x = e^y + \frac{y}{xy} = e^y + \frac{1}{x}$$

$$f'_y = xe^y + \frac{x}{xy} = xe^y + \frac{1}{y}.$$

$f'_x(1,2) = e^2+1$, $f'_y(1,2) = e^2 + \frac{1}{2}$.

Tangentplanet ges av

$$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2),$$

dvs $$z = e^2 + \ln(2) + (e^2+1)(x-1) + (e^2+\tfrac{1}{2})(y-2)$$

b.) Vi ser att $(1-(1-t))^2 - t^2 = 0$,
så nivåkurvan blir $(1-x)^2 - y = 0$.

3.) $$\left.\begin{aligned} f'_x &= 4x - 2y = 0 \\ f'_y &= -3y^2 - 2x = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

(1) ger $y = 2x$, vi sätter in det i (2):
$-3\cdot(2x)^2 - 2x = 0 \iff 12x^2 + 2x = 0$
$x(6x+1) = 0$ som har lösn. $x = 0$, $x = -1/6$.

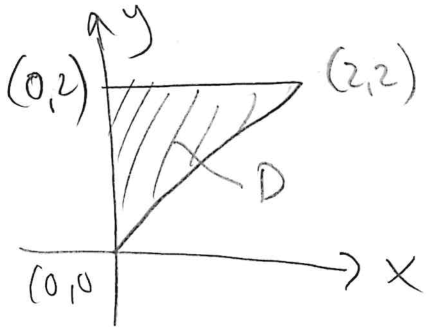
De två lösningarna är då
$(0,0)$ och $(-1/6, -1/3)$. Vi tar fram andraderivatorna för att avgöra punkternas karaktär.

$f''_{xx} = 4$ $\quad f''_{xy} = -2$ $\quad f''_{yy} = -6y$.

För $(0,0)$ får vi den kvadratiska formen
$4h^2 - 4hk = 4\left(\left(h-\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right)$ som är indefinit,
dvs en sadelpunkt.

För $(-1/6, -1/3)$ får vi den kvadratiska formen
$4h^2 - 4hk + 2k^2 = 4\left(\left(h-\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right) + 2k^2 =$
$= 4\left(h-\frac{k}{2}\right)^2 + k^2$, som är positivt definit,
vilket ger ett lokalt minimum.

4.) Om $f(x,y) = y^2 + 4x$ så är
$f'_x = 4$
$f'_y = 2y$.



Vi ska integrera ovanför D, som har gränserna

$0 \le y \le 2$

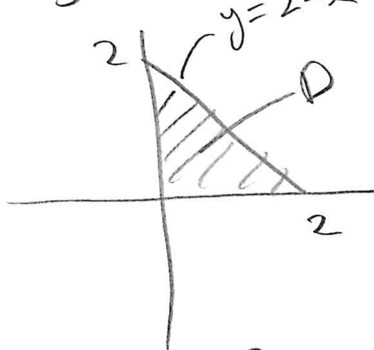
$0 \le x \le y$.

Ytans area blir då $\displaystyle\int_0^2 \int_0^y \sqrt{4^2 + (2y)^2 + 1}\, dx\, dy =$

$$= \int_0^2 \left[x\sqrt{4y^2+17} \right]_0^y dy = \int_0^2 y\sqrt{4y^2+17}\, dy =$$

$$= \left[\frac{(4y^2+17)^{3/2}}{3/2 \cdot 8} \right]_0^2 = \frac{33^{3/2}}{12} - \frac{17^{3/2}}{12} = \underline{\underline{\frac{33^{3/2} - 17^{3/2}}{12}}}$$

5. $z = 4 - x^2$ är en yta över xy-planet, och $x+y=2$ är ett vertikalt plan som tillsammans med koordinatplanen skär ut området D i xy-planet. Ytan $z = 4 - x^2$ ligger ovanför xy-planet när $(x,y) \in D$. Så volymen blir: $\displaystyle\iint_D \int_0^{4-x^2} dz\, dx\, dy =$



$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-x^2} dz\, dy\, dx =$$

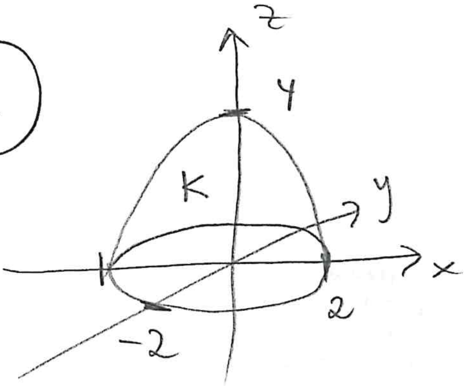
$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} 4 - x^2\, dy\, dx = \int_0^2 \left[(4-x^2)y \right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)(2-x)\, dx = \int_0^2 8 - 4x - 2x^2 + x^3\, dx =$$

$$= \left[8x - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 16 - 8 - \frac{16}{3} + 4 =$$

$$= 12 - \frac{16}{3} = \frac{36-16}{3} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$

6.



Divergenssatsen ger att

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div}(\mathbb{F})\, dx\,dy\,dz$$

$\operatorname{div}(\mathbb{F}) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, så flödet blir:

$$3\iiint_K x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz = 3\iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} x^2+y^2+z^2 \, dz\,dx\,dy$$

om D är skivan $x^2+y^2 \leq 4$. Detta blir:

$$3\iint_D \left[(x^2+y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_0^{4-x^2-y^2} dx\,dy =$$

$$= 3\iint_D (x^2+y^2)(4-x^2-y^2) + \frac{(4-x^2-y^2)^3}{3} \, dx\,dy = \left\{\begin{array}{l}\text{polära}\\ \text{koord.}\end{array}\right\} =$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2(4-r^2) + \frac{(4-r^2)^3}{3}\right) r\,dr\,d\theta =$$

$$= 6\pi \int_0^2 4r^3 - r^5 + \frac{r(4-r^2)^3}{3} \, dr =$$

$$= 6\pi \left[r^4 - \frac{r^6}{6} - \frac{(4-r^2)^4}{3 \cdot 4 \cdot 2}\right]_0^2 =$$

$$= 6\pi\left(16 - \frac{64}{6} - 0 - \left(0 - 0 - \frac{2^8}{3 \cdot 2^3}\right)\right) =$$

$= 6\pi\left(16 - \cancel{\frac{32}{3}} + \cancel{\frac{32}{3}}\right) = \underline{\underline{96\pi}}$

7. a. Se boken.

b. Vi kollar om fältet är konservativt, i så fall är $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$.

Finns lösning till följande?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+1} - ye^{xy} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \arctan(x) - xe^{xy} & (2) \end{cases}$$

Från (1) får vi $u = y\arctan(x) - e^{xy} + f(y)$

och från (2): $u = y\arctan(x) - e^{xy} + g(x)$.

Så vi kan sätta $f(y) = g(x)$ och få

$u = y\arctan(x) - e^{xy}$ så $\mathbb{F}$ är konservativt och $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$.

8. Se boken.