Tentalösningar MMGF20/LGMA50
19/3 2019 Elin Götmark

1. Vi testar två olika vägar.

Väg 1: $x = 0$. $\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0 \cdot y^2}{0 + 3y^4} = 0$

Väg 2: $x = y$ $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2 x^2}{x^4 + 3x^4} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4}$

Det blir olika för olika vägar, alltså existerar inte gränsvärdet.

2. Sätt $g(x,y) = 20x + 170y$. Vi söker punkter där $\nabla f = \lambda \nabla g$ och $g = 1000$.

$\nabla f = \left(\frac{2}{3} 200 x^{-1/3} y^{1/3}, \frac{1}{3} 200 x^{2/3} y^{-2/3}\right)$

$\nabla g = (20, 170)$. $(\nabla g \neq 0)$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \cdot 200 x^{-1/3} y^{1/3} = 20\lambda \\ \frac{1}{3} 200 x^{2/3} y^{-2/3} = 170\lambda \\ 20x + 170y = 1000 \end{cases}$$

Vi löser ut λ ur (1) och sätter in i (2):

$\lambda = \frac{20}{3} x^{-1/3} y^{1/3}$

$\frac{200}{3} x^{2/3} y^{-2/3} = 170 \cdot \frac{20}{3} x^{-1/3} y^{1/3}$ $\Leftrightarrow$ (multiplicera med $\frac{3}{200} x^{1/3} y^{2/3}$)

$x = 17y$ Sätt in i (3):

$20 \cdot 17y + 170y = 1000 \Leftrightarrow 510y = 1000$

$y = \frac{100}{51}$ $x = 17 \cdot \frac{100}{51} = \frac{100}{3}$

Då är $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{51}\right) = 200 \cdot \left(\frac{100}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{100}{51}\right)^{1/3} = 200 \cdot \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{17^{1/3}} = \underline{\underline{\frac{20000}{3 \cdot 17^{1/3}}}}$

Eftersom $f \geq 0$ på vårt område och noll i ändpunkterna där $x = 0$ eller $y = 0$ så måste den punkt vi hittat vara max.

(3.) Vi byter först variabler i derivatorna.

$$f'_x = f'_s \cdot s'_x + f'_t \cdot t'_x = f'_s \cdot 1 + f'_t \cdot \frac{1}{y}$$

$$f'_y = f'_s \cdot s'_y + f'_t \cdot t'_y = f'_s \cdot 0 + f'_t \cdot -\frac{x}{y^2}.$$

Sätt in i ekvationen: $x e^x f'_x + y e^x f'_y = x \iff$

$$s e^s \left(f'_s + \frac{t}{s} f'_t\right) + \frac{s}{t} e^s \cdot \left(-\frac{t^2}{s} f'_t\right) = s \iff$$

$$s e^s f'_s + \cancel{t f'_t} - \cancel{t f'_t} = s \iff f'_s = e^{-s}$$

Så $f(s,t) = -e^{-s} + g(t)$, dvs $\underline{f(x,y) = -e^{-x} + g\left(\frac{x}{y}\right)}$.

$$f(1,y) = -e^{-1} + g\left(\frac{1}{y}\right) = -1/e + g\left(\frac{1}{y}\right) = -1/e + 2y$$

enligt villkoret.

Så $g\left(\frac{1}{y}\right) = 2y$. Det innebär att $g(t) = \frac{2}{t}$, så lösningen blir $\underline{f(x,y) = -e^{-x} + \frac{2y}{x}}$

(4.) Ytan parametriseras genom $(x,y,z) = (s,t,st)$. Arean ges då av

$$\iint_D |r'_s \times r'_t| \, ds\, dt \quad \text{där} \quad (s,t) \in D = \{x^2+y^2 \leq 2\}.$$

$$r'_s = (1,0,t) \qquad r'_t = (0,1,s).$$

$$r'_s \times r'_t = (1,0,t) \times (0,1,s) = (-t,-s,1).$$

$$\iint_{s^2+t^2 \leq 1} |(-t,-s,1)| \, ds\, dt = \iint_{s^2+t^2\leq 1} \sqrt{t^2+s^2+1} \, ds\, dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{r^2+1} \, d\theta\, dr = 2\pi \left[\frac{(r^2+1)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \underline{\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)}$$

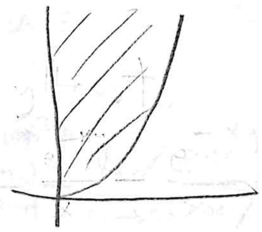
(5.) Integralen är generaliserad eftersom integrationsområdet är obegränsat. Integranden är positiv i integrationsområdet

$$\iint_D xe^{-x^2-y}\,dxdy = \int_0^\infty\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2-y}\,dxdy =$$

$$= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2-y}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty -\frac{1}{2} e^{-2y} + \frac{e^{-y}}{2}\,dy$$

$$= \left[\frac{e^{-2y}}{4} - \frac{e^{-y}}{2}\right]_0^\infty = \underbrace{\lim_{y\to\infty} \frac{e^{-2y}}{4} - \frac{e^{-y}}{2}}_{=0} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Alternativt:



$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\int_{x^2}^\infty e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^\infty xe^{-x^2}\left[-e^{-y}\right]_{x^2}^\infty dx =$$

$$= \int_0^\infty xe^{-x^2}\left(\underbrace{\lim_{y\to\infty} -e^{-y}}_{=0} + e^{-x^2}\right)dx = \int_0^\infty xe^{-2x^2}\,dx = \left[-\frac{e^{-2x^2}}{4}\right]_0^\infty =$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{e^{-2x^2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(6.) Vi använder divergenssatsen. Då är

$$\iiint_K \operatorname{div}(F)\,dxdydz = \iint_Y F\cdot N\,dS + \iint_{\tilde{Y}} F\cdot N\,dS,$$ där

$\tilde{Y}$ är konens botten. Vi söker denna.

$\operatorname{div}(F) = 0+0+0 = 0$, så VL $= 0$.

$\tilde{Y}$ är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 4$ i xy-planet, och normalen är där $N = (0,0,-1)$, och $dS = dxdy$ eftersom ytan är platt.

$$\iint_{\tilde{Y}} F\cdot N\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 4} -e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 -e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= -2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^2 = -2\pi\left(\frac{e^{-4}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{e^4} - 1\right)$$

Svar: $\iint_Y F\cdot N\,dS = -\pi\left(\frac{1}{e^4} - 1\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$

7\. a. Vi söker U så att $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

$\int P\,dx = \frac{x^4y^4}{2} + \frac{x^2}{2} + f(y)$ Så $f(y) = \frac{y^2}{2}$ och

$\int Q\,dy = \frac{x^4y^4}{2} + \frac{y^2}{2} + g(x)$ $g(x) = \frac{x^2}{2}$

Svar: $U(x,y) = \frac{x^4y^4}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

b. Se boken, sats

8\. Se boken, kapitel 2, Sats 5.