Tentalösning MMGF20/LGMA50

11/6 2019 Elin Götmark

1.) Vi börjar med att räkna ut ytornas normaler. Sätt $F(x,y,z) = 4x^2+9y^2+z^2$ och $G(x,y,z) = x^2+4y^2-z^2$. Då är $\nabla F = (8x, 18y, 2z)$ och $\nabla G = (2x, 8y, -2z)$, och $\nabla F(3,2,5) = (24, 36, 10)$ och $\nabla G(3,2,5) = (6,16,-10)$. Dessa vektorer är normaler till de båda ytorna i punkten $(3,2,5)$. En tangentvektor till skärningslinjen är vinkelrät mot båda dessa, dvs den är parallell med deras kryssprodukt.

$$(24, 36, 10) \times (6, 16, -10) = \underline{\underline{(-520, 300, 168)}}$$

2.) Först tar vi fram de stationära punkterna, dvs de punkter där $f'_x = f'_y = 0$.

$f'_x = 6x - 6y$ $\quad$ $f'_y = -6x + 6y^2$

$6x - 6y = 0 \iff x = y$. Vi stoppar in detta i $f'_y = 0$:

$-6x + 6x^2 = 0 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0$.

Så $x = y = 0$ eller $x = y = 1$.

$\underline{(0,0)}$: Vi undersöker andraderivatorna.

$f''_{xx} = 6$ $\quad$ $f''_{xy} = -6$ $\quad$ $f''_{yy} = 12y$. I $(0,0)$ är $f''_{yy} = 0$, så andragradsdelen av Taylorutvecklingen kring $(0,0)$ är $\frac{1}{2}(6h^2 - 2\cdot 6\cdot hk + 0\cdot k^2) = 3h^2 - 6hk = 3(h^2 - 2hk) = 3((h-k)^2 - k^2)$. Den kvadratiska formen är alltså indefinit och $(0,0)$ är en $\underline{\underline{\text{sadelpunkt}}}$.

$\underline{(1,1)}$: Motsvarande kvadratiska form blir

$$\frac{1}{2}(6h^2 - 2\cdot 6hk + \underbrace{12}_{f''_{yy}(1,1)=12}k^2) = 3(h^2 - 2hk + 2k^2) =$$

$$= 3\left((h-k)^2 - k^2 + 2k^2\right) = 3\left((h-k)^2 + k^2\right)$$

Denna är positivt definit, så (1,1) är ett lokalt mi

$f(1,1) = 3 - 6 + 2 = -1$. Lokala max saknas.

3. Vi byter variabler i derivatorna.

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + f'_v.$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - f'_v.$$

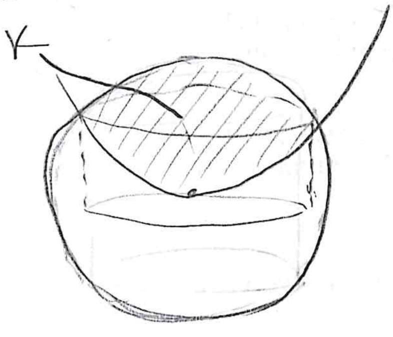
$$f''_{xx} = \left(f''_{uu} \cdot u'_x + f''_{uv} \cdot v'_x\right) + \left(f''_{vu} \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot v'_x\right) = f''_{uu} + 2f''_{uv} + f'_{vv}$$

$$f''_{xy} = \left(f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y\right) + \left(f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{vv} \cdot v'_y\right) = f''_{uu} - f''_{vv}$$

$$f''_{yy} = \left(f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y\right) - \left(f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{vv} \cdot v'_y\right) = f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}$$

Så $f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = (1+2+1)\cdot f''_{uu} + (2-2)\cdot f''_{uv} + (1-2+1)\cdot f''_{vv} =$
$= 4f''_{uu} = 0$. Om $f''_{uu} = 0$ är $f'_u = g(v)$, och
$f = u \cdot g(v) + h(v) = \underline{(x+y)\cdot g(x-y) + h(x-y)}$, där
g och h är godtyckliga funktioner.

4. De två ytorna är en skål som skär igenom en sfär. Var skär de varann? Sätt in $z = x^2+y^2$ i den andra ekvationen:



$$x^2 + y^2 + (x^2+y^2)^2 = 2. \quad \text{Sätt } r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$r^2 + r^4 = 2 \qquad r^4 + r^2 - 2 = 0$$

$$r^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Så $r^2 = 1$ eller $r^2 = -2$, där den andra är orimlig.

Så $r = 1$. $$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2 - x^2 - y^2 - (x^2+y^2)^2 \, dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\int_0^1 (2-r^2-r^4)r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \pi\left(\frac{12-3-2}{12}\right) = \frac{7\pi}{12}$$

5. a. $\int_0^{\pi/4} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^{\pi/4} \sin(t)\cdot t\cdot(-\sin(t)) +$

$+ \cos(t)\cdot t\cdot\cos(t) + \cos(t)\sin(t)\cdot 1 \;dt =$

$$= \int_0^{\pi/4} t\cdot\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\,dt =$$

$$= \left[t\,\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 1\cdot\frac{\sin(2t)}{2}\,dt + \left[-\frac{1}{2}\,\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} + \left[\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

b. Vi söker u så att $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, dvs $u(x,y,z) = xyz$ $+ f(y,z)$. Men $\frac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz = Q$ och $\frac{\partial}{\partial z}(xyz) = xy$, så $u(x,y,z) = xyz$.

$$\int_0^{\pi/4} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = u\left(\frac{\pi}{4}\right) - u(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4} - \cos(0)\sin(0)\cdot 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{8}$$

6. Låt D vara ett område sådant att $\partial D = \gamma$.
Då ger Greens sats:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_D 16 - 3x^2 - 6y^2$$

$$-(6x^2 + 3y^2 - 20)\,dx\,dy = \iint_D 36 - 9(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Integralen blir störst om vi bara integrerar över det område där integranden är positiv.

$$36 - 9(x^2+y^2) > 0 \iff x^2+y^2 \leq 4.$$

Så $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\}$. Byt till polära koord.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (36 - 9r^2)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[18r^2 - \frac{9r^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \left(18 \cdot 4 - \frac{9 \cdot 16}{4} \right) = 2 \cdot 9 \cdot 4\pi (2-1) = \underline{\underline{72\pi}}$$

7. a. Se definition 1 i kapitel 2.1

b. Se sats 2 i kapitel 2.2.

8. Se sats 7 i kapitel 2.4.