Tentalösningar MMGF20/LGMA50

27/8 2019 Elin Götmark

1. Tangentplanets normal ges av ∇F, där $F(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 - z$.

$\nabla F = (4x, -6y, -1)$. Tangentplanet är parallellt med planet $8x + 12y + z = 4$ om deras normaler är parallella, dvs $(8, 12, 1) = k(4x, -6y, -1)$.

Vi ser att $k = -1$, dvs $\begin{cases} -4x = 8 \\ 6y = 12, \end{cases}$

eller $\underline{(x,y) = (-2, 2)}$. $z = 2\cdot(-2)^2 - 3\cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$

Tangentplanet är då $(-8, -12, -1)\cdot(x+2, y-2, z+4) = 0$

$-8x - 16 - 12y + 24 - z - 4 = 0$

$\underline{8x + 12y + z = 4}$

2. a. Enligt implicita funktionssatsen är detta möjligt där $F'_y \neq 0$.

$F'_y = 2xy - x = 0 \iff x(2y-1) = 0$

$\underline{x = 0}$ ger $0 = 1$, så det ger ingen lösning.

$\underline{y = \frac{1}{2}}$ ger $x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x\cdot\frac{1}{2} = 1 \iff \frac{x}{4} - \frac{x}{2} = 1 \iff x = -4$.

Svar: $\underline{(-4, \frac{1}{2})}$

b. Vad är y när $x = 1$?

$1\cdot y^2 - 1\cdot y = 1 \iff y^2 - y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vi väljer $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ enligt instruktion.

Implicit derivering m.a.p. x och med $y = y(x)$ ger

$1\cdot y^2 + 2xyy' - 1\cdot y - xy' = 0$

$y' = \frac{y - y^2}{2xy - x}$. Sätt in $x = 1$, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$y'(1) = \frac{\frac{1+\sqrt5}{2} - \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2}{\cancel{2}\cdot 1\left(\frac{1+\sqrt5}{\cancel{2}}\right) - 1} = \frac{1}{\sqrt5}\,\frac{1}{4}\left(2\cdot(1+\cancel{\sqrt5}) - (1+2\cancel{\sqrt5}+5)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt5}(2-6) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

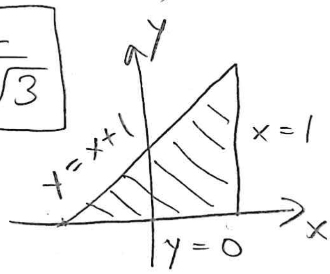
3. Vi vet att min och max existerar på området eftersom det är kompakt. Först hittar vi de stationära punkterna: $f'_x = 2xy = 0$ $f'_y = x^2+3y^2-1 = 0$.

$2xy = 0$ ger antingen $x=0$ eller $y=0$.

$x = 0 \Rightarrow 3y^2-1 = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt3}$ dvs $(0, \pm\frac{1}{\sqrt3})$ där bara $(0, \frac{1}{\sqrt3})$ ligger i omr.

$y = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ dvs $(\pm 1, 0)$

$f(0, \frac{1}{\sqrt3}) = \pm\frac{1}{3\sqrt3} \mp \frac{1}{\sqrt3} = \pm\frac{1}{\sqrt3}\left(\frac13 - 1\right) = \boxed{-\frac{2}{3\sqrt3}}$



$f(\pm 1, 0) = \boxed{0}$. Nu tittar vi på randen.

$x = 1$: $g_1(y) = f(1,y) = y + y^3 - y = y^3$

$g_1'(y) = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ $f(1,0) = \boxed{0}$

$y = 0$: $f(x,0) = \boxed{0}$

$y = x+1$: Sätt $x = y-1$. $g_2(y) = f(y-1,y) = (y-1)^2 y + y^3 - y = y^3 - 2y^2 + \cancel{y} + y^3 - \cancel{y} = 2y^3 - 2y^2$

$g_2'(y) = 6y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ eller $3y - 2 = 0$, dvs $y = \frac23$

Om $y = 0$ är $x = -1$. Om $y = \frac23$ är $x = \frac23 - 1 = -\frac13$.

$f(-1,0) = \boxed{0}$ $f(-\frac13, \frac23) = \frac{2}{27} + \frac{8}{27} - \frac23 = \frac{10-18}{27} = \boxed{-\frac{8}{27}}$

Hörnen: $f(\pm1,0) = \boxed{0}$, $f(1,2) = \boxed{8}$, vilket är max. Vilket är minst av $-\frac{8}{27}$ och $-\frac{2}{3\sqrt3}$? $\frac{2}{3\sqrt3} = \frac{2\cdot 3\sqrt3}{27}$. Vi måste alltså avgöra om $6\sqrt3 > 8$. Kvadrering ger $36\cdot 3 > 64$, vilket är sant. Så min är $f(0, \frac{1}{\sqrt3}) = -\frac{2}{3\sqrt3}$.

$f(2,-2) = 2((-2)^2-2)e^{2} = \underline{\underline{4e^2}}$

$f(-2,-2) = -2((-2)^2-2)e^2 = \underline{\underline{-4e^2}}.$

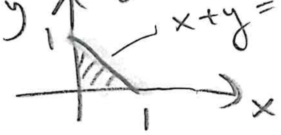
Vad är störst/minst?

$4e^2 > 4\cdot 2^2 = 16$ och $12e^{-2} < \frac{12}{3^2} = \frac{4}{3}.$

<u>Svar:</u> max är $f(2,-2) = \underline{\underline{4e^2}}$

min är $f(-2,-2) = \underline{\underline{-4e^2}}.$

4. Massan ges av $\iiint_K p(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

I xy-planet har vi fyrkanten 

Ena z-gränsen är $z=1$ och den andra är $z=1+x+y$, vilket är ≥ 1 för de x- och y-värden vi har. Integralen blir

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_1^{1+x+y} 2x-1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1(2x-1)\int_0^{1-x}[z]_1^{1+x+y}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1(2x-1)\int_0^{1-x}\cancel{1}+x+y-\cancel{1}\,dy\,dx = \int_0^1(2x-1)\cdot\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx =$$

$$= \int_0^1(2x-1)\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx = \int_0^1(2x-1)\left(\frac{\cancel{2x}-2x^2+1-\cancel{2x}+x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(2x-1)(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x-1-2x^3+x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2-x-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{12}}}$$

(5.) Vi använder rymdpolära koordinater och anpassar dem efter halvaxlarna i ellipsoiden.

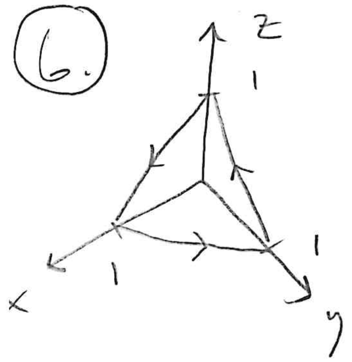
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = \frac{1}{2} r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 3r\cos\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \frac{3}{2} r^2 \sin\theta$$

$$\iiint_K dV = \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \left[-\cos\theta\right]_0^\pi =$$

$$= 3\pi \cdot \frac{1}{3}\cdot(-(-1)-(-1)) = \underline{\underline{2\pi}} \text{ volymsenheter.}$$

(6.)



$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_Y (\text{rot}\,\mathbb{F}) \times \mathbb{N}\, dS$$

För att orienteringen ska stämma ska normalen peka bort från origo.

$$\text{rot}\,\mathbb{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (z^2, y^2, x) = (0, 2z-1, 0)$$

Vi väljer en parametrisering av ytan, som är den samma som planet $x+y+z=1$.

$$\mathbb{x}(x,y,z) = (s, t, 1-s-t) \qquad 0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1-s.$$

$$\mathbb{x}'_s = (1, 0, -1) \qquad \mathbb{x}'_t = (0, 1, -1)$$

$$\mathbb{x}'_s \times \mathbb{x}'_t = (1, 1, 1). \qquad \iint_Y (\text{rot}\,\mathbb{F}) \times \mathbb{N}\, dS =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-s} (\text{rot}\,\mathbb{F}) \times (\mathbb{x}'_s \times \mathbb{x}'_t)\, dt\, ds = \int_0^1\int_0^{1-s} 2(1-s-t)-1\, dt\, ds =$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-s} 1-2s-2t\, dt\, ds = \int_0^1 \left[t-2st-t^2\right]_0^{1-s} ds =$$

$$= \int_0^1 (1-s) - 2s(1-s) - (1-s)^2 \, ds =$$

$$= \int_0^1 \cancel{1} - s - \cancel{2s} + 2s^2 - \cancel{1} + \cancel{2s} - s^2 \, ds$$

$$= \int_0^1 s^2 - s \, ds = \left[\frac{s^3}{3} - s^2 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

7. a. Se definition 5 i kapitel 2.4

b. Se sats 6 i kapitel 2.4

8. Se sats 2 i kapitel 9.4.