Lösningar till tentan i MMGF20/LGMA50

13/3 2018, Elin Götmark

1. a. $\nabla f = (2xy + y^2 + 1 + 2y,\ x^2 + 2xy + 2x)$

$\nabla f(1,-2) = (2\cdot(-2) + 4 + 1 + 2\cdot(-2),\ 1 + 2\cdot(-2) + 2) = (-3,-1)$

Kontroll: $f(1,-2) = 1\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 1 + 2\cdot(-2) = -1$, så $(1,-2)$ ligger på nivåkurvan. $\nabla f(1,-2) = (-3,-1)$ är normal till nivåkurvan i $(1,-2)$, dvs $(-1,3)$ är tangent till den. Tangentens k-värde är då $-\frac{3}{1}$, så ekvationen är $y-(-2) = -3(x-1) \iff$

$$\underline{\underline{y = -3x+1}}$$

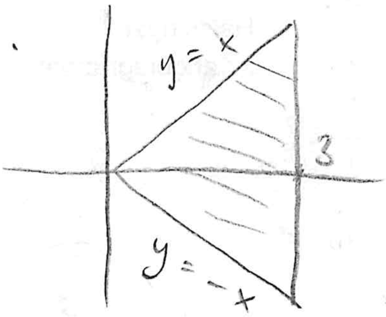
) Tangentplanets ekvation är

$$z = 1 + (-3)(x-1) + (-1)\cdot(y-(-2)) \iff$$

$$3x + y + z = 2$$

c) I riktningen $\nabla f(1,-2) = (-3,-1)$.

2.) Området ser ut så här:



Vi vet att min/max existerar eftersom området är kompakt. Vi undersöker först det inre:

$$f'_x = (3-x^2)e^{3x - \frac{x^3}{3} - y^2} = 0$$
$$f'_y = -2y\,e^{3x - \frac{x^3}{3} - y^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

Bara $(\sqrt{3},0)$ ligger i området.

$$f(\sqrt{3},0) = e^{3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}} = e^{2\sqrt{3}}$$

Nu undersöker vi randen:

$y=\pm x$: $g_1(x) = e^{3x-\frac{x^3}{3}-x^2}$ $\quad g_1'(x) = (3-x^2-2x)e^{3x-\frac{x^3}{3}-x^2}$

$g_1'(x) = 0 \iff x^2+2x-3=0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+3} =$
$= -1 \pm 2$

Bara $x = 1$ ligger i området.

$f(1,1) = e^{3-\frac{1}{3}-1} = e^{5/3}$ eller $f(1,-1) = e^{5/3}$

$x = 3$: $g_2(y) = e^{9-\frac{27}{3}-y^2} = e^{-y^2}$ som har max i $y=0$.

$f(3,0) = e^0 = 1$. Hörnen: $f(0,0) = e^0 = 1$ $\quad f(3,\pm 3) = e^{-9}$

$2\sqrt{3} > 2 > 5/3$, så $e^{2\sqrt{3}}$ är max och e^{-9} är min.

③ $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + f'_v$.

$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - f'_v$

Vi kan alltså skriva om diff. ekv. så här:

$f'_u + f'_v = f'_u - f'_v + 2f \iff f'_v = f$.

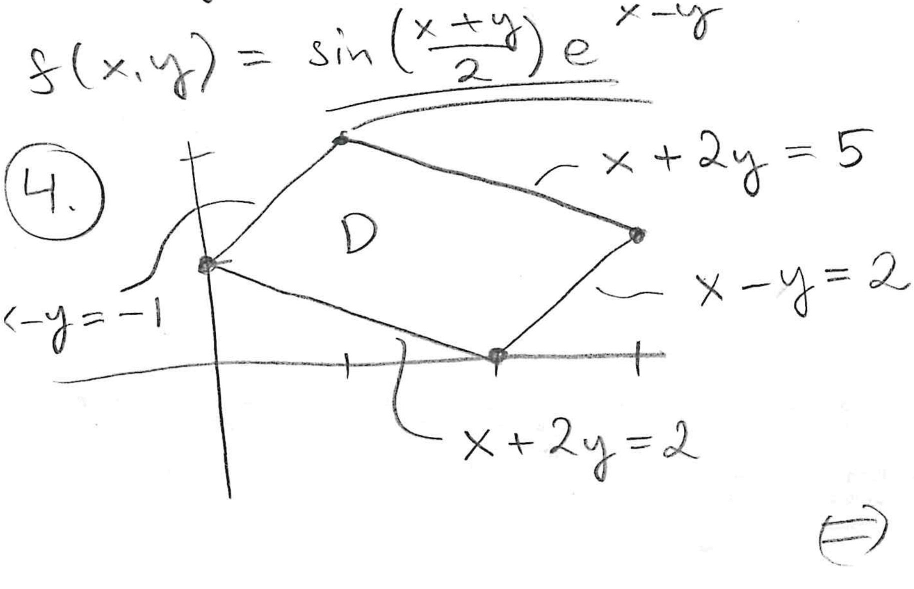
Vi ser att $f(u,v) = g(u)e^v$ (vilken funktion är det som inte ändrar sig när vi deriverar? Alt: använd integrerande faktor-metoden).

$f(x,y) = g(x+y)e^{x-y}$. $\quad f(x,x) = g(x+x)e^{x-x} = g(2x) =$
$= \sin(x)$

Så $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$, och

$f(x,y) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{x-y}$

④



Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{v-u}{3} \end{cases}$$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-(-1) = 3, \text{ så } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{3}.$$

$$\iint_D x+y \, dx\,dy = \int_{-1}^{2}\int_{2}^{5}\left(\frac{2u+v}{3} + \frac{v-u}{3}\right)\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dv\,du =$$

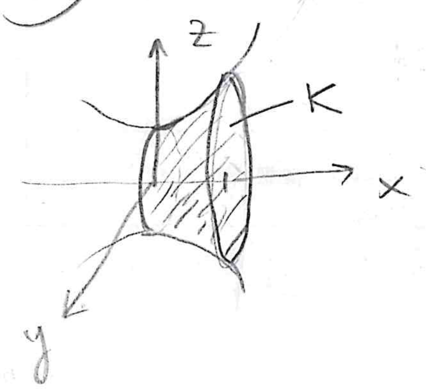
$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\int_{2}^{5} u+2v \, dv\,du = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\left[uv+v^2\right]_2^5 du =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} 5u+25-(2u+4)\, du = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2} 3u+21\, du =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{3u^2}{2}+21u\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{9}\left(\frac{3\cdot 4}{2}+42-\left(\frac{3}{2}-21\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(6+42-\frac{3}{2}+21\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{135}{2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{5\cdot 27}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

⑤ Området är:



$$m = \int_0^1\left(\iint_{y^2+z^2\le 1+x^2} 1 \quad dy\,dz\right)dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+x^2}} r\,dr\,d\theta\,dx =$$

$$= \int_0^1 \cdot 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1+x^2}} dx = \pi\int_0^1 (1+x^2)\,dx =$$

$$\pi\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\iiint_K x\cdot 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 x\iint_{y^2+z^2\le 1+x^2} 1 \, dy\,dz\,dx = \{\text{som ovan}\} =$$

$$= \pi\int_0^1 x(1+x^2)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

Så $x_T = \frac{3\pi}{4} \Big/ \frac{4\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{9}{16}}}$

$\underline{\underline{y_T = z_T = 0}}$ eftersom kroppen är symmetrisk kring x-axeln.

6.) Vi ska räkna ut $\iint_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS =$

$= \iint_D \mathbb{F}\cdot(\mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t)\,ds\,dt$, där Y är ytan $z = xy$ ovanför området $\{x^2+y^2 \leq 1\}$. Vi parametriserar ytan med $\mathbb{r}(s,t) = (s, t, st)$. Då är $D = \{s^2+t^2 \leq 1\}$

$\mathbb{r}'_s = (1, 0, t)$ $\qquad \mathbb{r}'_s \times \mathbb{r}'_t = (-t, -s, 1)$

$\mathbb{r}'_t = (0, 1, s)$ $\qquad \mathbb{F}(\mathbb{r}(s,t)) = (s^2t, st^2, t^2)$

$$\iint_D (s^2t, st^2, t^2)\cdot(-t,-s,1)\,ds\,dt = \iint_{s^2+t^2\leq 1} -2s^2t^2+t^2\,ds\,dt$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{polära}\\ \text{koord.}\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2r^5\cos^2\theta\sin^2\theta + r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{r^6}{3}\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{r^4}{4}\sin^2\theta\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12}(1-\cos^2 \underset{=0}{2\theta}) + \frac{1}{8}(1-\underset{=0 \text{ pga integral över hela perioder}}{\cancel{\cos 2\theta}})\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12}\left(1-\frac{1+\cancel{\cos 4\theta}}{2}\right) + \frac{1}{8}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\,d\theta = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{24}+\frac{3}{24}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

7.) a.) Se s. 99 i boken

b.) Se s. 53 i boken.

8.) a.) Se s. 352 i boken.

b.) Vi visar först att fältet uppfyller villkoret

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}:$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}.$$

Låt nu γ vara enhetscirkeln.

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\cdot(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Om fältet vore konservativt så hade integralen varit noll. Alltså kan fältet inte vara konservativt.