<u>Lösningar</u> Tenta MMGF20/LGMA50
Elin Götmark 8/6 2018

(1.) Vi kan definiera f i $(1,0)$ så att den blir kontinuerlig där om

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$$ existerar.

Sätt $(x,y) = (1+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$. När $r \to 0$ så går (x,y) mot $(1,0)$.

$$\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = \frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\sin^3\theta \to 0$$

när $r \to 0$.

<u>Svar</u>: ja, med $f(1,0)=0$.

(2.) $$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2+y = 0 \\ f'_y &= x-3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$y = -3x^2$
sätt in i (2):

$x - 3\cdot 9x^4 = 0$

$x(1-27x^3) = 0$

Så vi har $x=0$ eller $x = \frac{1}{3}$. De stationära punkterna är då $(0,0)$ och $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = 1 \qquad f''_{xy} = -6y.$

<u>$(0,0)$</u>: $Q(h,k) = 2hk$ som är indefinit, och alltså är $(0,0)$ en <u>sadelpunkt</u>.

<u>$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$</u>: $Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 2k^2 =$

$= 2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right) = 2\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right).$

Q är positivt definit och $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ är ett <u>lokalt min</u>.

3\. a. Vi sätter in parametiseringen för att se om den uppfyller ytans ekvation:

$$VL = \left(\cos^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(t) + 3\right)^2 = \left((2+\cos(t))^2 + \sin^2(t) + 3\right)^2 =$$

$$= (4 + 4\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) + 3)^2 =$$

$$= (8 + 4\cos(t))^2 = 16(2+\cos(t))^2$$

$$HL = 16\left(\cos^2(s)(2+\cos(t))^2 + \sin^2(s)(2+\cos(t))^2\right) =$$

$$= 16(2+\cos(t))^2.$$ $VL = HL$, så vi är klara

b. $x'_t = (\cos(s)\cdot(-\sin(t)), \sin(s)\cdot(-\sin(t)), \cos(t))$

$x'_s = (-\sin(s)(2+\cos(t)), \cos(s)(2+\cos(t)), 0)$

Vad är s och t när $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$?

$\sin(t) = 0$, så $t = 0$ eller $t = \pi$.

Då är antingen $\cos(t) = 1$ eller $\cos(t) = -1$.

Om vi väljer $t = \pi$ får vi $\begin{cases} \cos(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

så då är $s = \frac{\pi}{4}$.

Om vi väljer $t = 0$ blir $\begin{cases} \cos(s) = 1/3\sqrt{2} \\ \sin(s) = 1/3\sqrt{2} \end{cases}$, vilket inte är lösbart eftersom $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{9\cdot 2} < 1$.

Alltså är $(t,s) = \left(\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. Så

$$x'_t\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(0), \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(0), -1\right) = (0,0,-1)$$

$$x'_s\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(2-1), 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

Normalen ges då av $x'_t(\pi, \frac{\pi}{4}) \times x'_s(\pi, \frac{\pi}{4}) =$

$$= (0,0,-1) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

och tangentplanet ges av:

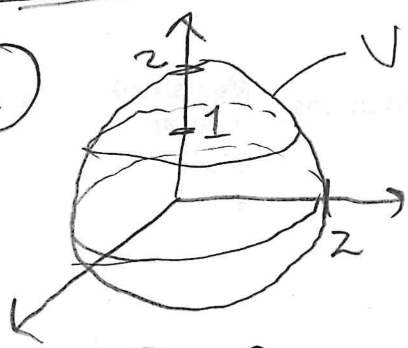
$$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}, z\right) = 0$$

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$\underline{x + y = \sqrt{3}}$$

4.



Vi ska beräkna arean av "locket". Låt D vara cirkelskivan i xy-planet som ligger rakt under "locket". Vad är dess radie? Sätt $z = 1$. Sfärens ekvation blir då: $x^2 + y^2 + 1^2 = 2^2 \iff x^2 + y^2 = 3$. Så D:s radie är $\sqrt{3}$. Vi använder parametiseringen $x(s,t) = (s, t, \sqrt{4 - s^2 - t^2})$, $(s,t) \in D$. Arean blir då:

$$\iint_D |x'_s \times x'_t| \, ds\,dt = I$$

$$x'_s = \left(1, 0, -\frac{s}{\sqrt{4-s^2-t^2}}\right) \quad x'_t = \left(0, 1, -\frac{t}{\sqrt{4-s^2-t^2}}\right)$$

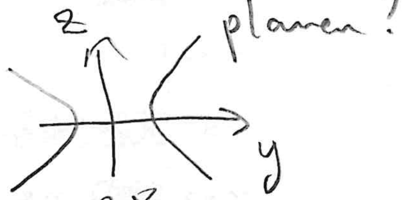
$$x'_s \times x'_t = \left(\frac{s}{\sqrt{4-s^2-t^2}}, \frac{t}{\sqrt{4-s^2-t^2}}, 1\right).$$

$$I = \iint_{s^2+t^2 \leq 3} \left(\frac{s^2+t^2}{4-s^2-t^2} + 1\right)^{1/2} ds\,dt =$$

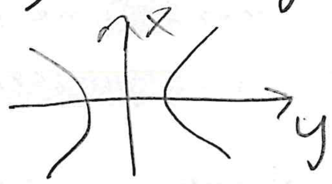
$$= \iint_{s^2+t^2\le 3} \left(\frac{4}{4-s^2-t^2}\right)^{1/2} ds\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \left[-2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = -4\pi(1-2) = \underline{\underline{4\pi}}$$

5. Vi listar först ut hur området ser ut. Sätt $x^2+z^2-y^2=-1$. Vad händer i koordinatplanen?

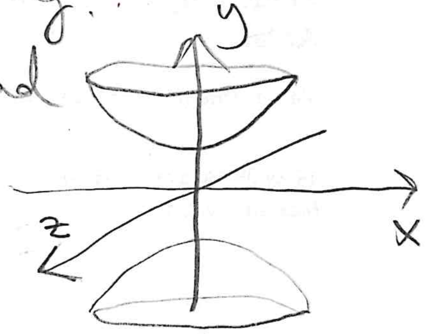


$\underline{x=0}$: $y^2-z^2=1$ Detta är en hyperbel:



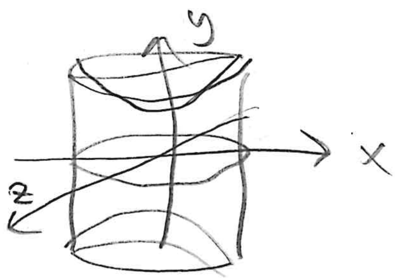
$\underline{z=0}$: $y^2-x^2=1$ —"—

$\underline{y=0}$: $x^2+z^2=-1$. Saknar lösning...



Ytan blir alltså en tvåmantlad hyperboloid:

Origo uppfyller att $x^2+z^2-y^2 \ge -1$, så området ligger mellan ytorna.



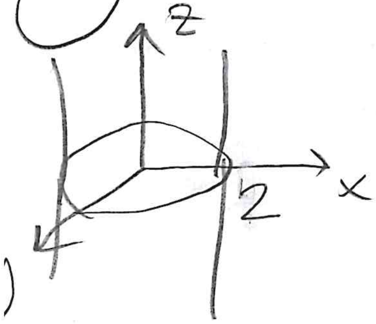
Vi ska alltså beräkna volymen av:

Som blir: $2\iint_{x^2+z^2\le 1} \sqrt{x^2+z^2+1}\,dx\,dz =$

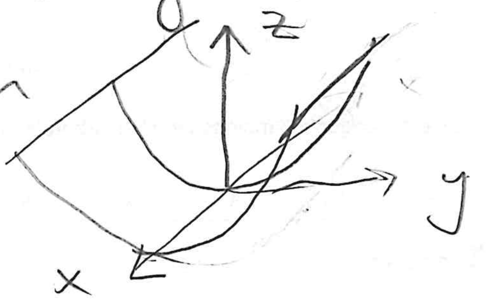
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr\,d\theta = 4\pi\left[(r^2+1)^{3/2}\cdot\frac{1}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)}}.$$

6.) Kurvan är skärningen mellan cylindern



och ytan



Kurvan skulle kunna parametriseras med

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ 4\sin^2(t)) \quad \text{så}$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ 8\sin(t)\cos(t)).$$

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (2\sin(t), -2\cos(t), 16\sin^4(t)) \cdot$$

$$\cdot\, (-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ 8\sin(t)\cos(t))\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-4\sin^2(t) - 4\cos^2(t)}_{=-4} + 128\sin^5(t)\cos(t)\, dt =$$

$$= \left[-4t + 128\cdot\sin^6(t)\cdot\frac{1}{6}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-8\pi}}$$

Alternativ lösning: med Stokes sats:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\mathrm{rot}(\mathbf{F})) \times \mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \times (\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t)\, ds\, dt$$

där $D = \{s^2+t^2 \leq 4\}$ och $\mathbf{r}(s,t) = (s, t, t^2)$.

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, -1-1) = (0,0,-2).$$

$$\mathbf{r}'_s = (1,0,0) \quad \mathbf{r}'_t = (0,1,2t) \quad \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (0, -2t, 1).$$

$$\text{Så } I = \iint_{s^2+t^2\leq 4} -2\, ds\, dt = -2\cdot\pi\cdot 2^2 = \underline{\underline{-8\pi}}$$

7. a. $f'_{v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

b) $(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

där f' är funktionalmatrisen till f.

c) $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = u(-1,0) - u(1,0) =$

$= (0 - (-1)^3 + 1) - (0 - 1^3 + 1) = \underline{\underline{2}}$

8. Se sats 7 i boken.