

Elin Gönmark

$$\textcircled{1. a.} \quad f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{v} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\nabla f = (2x e^{x^2-y}, -e^{x^2-y}) \quad \mathbf{a} = (1, 2)$$

$$\nabla f(1, 2) = (2e^{-1}, -e^{-1})$$

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = (2e^{-1}, -e^{-1}) \cdot \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{e^{-1}}{\sqrt{2}} (-2 - 1) = \underline{\underline{-\frac{3e^{-1}}{\sqrt{2}}}}$$

$$b.) \quad f \circ g(x, y) = f(g(x, y)) = f(xy^2) =$$

$$= (x^2 y^4, xy^2 + 1)$$

$$(f \circ g)' = \begin{bmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$

Funktionaldeterminanten blir då

$$\begin{vmatrix} 2xy^4 & 4x^2y^3 \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 4x^2y^5 - 4x^2y^5 = \underline{\underline{0}}$$

$\textcircled{2.}$  Vi vill minimera avståndet mellan origo och  $(x, y)$ , under förhållandet att  $(x, y)$  ligger i planet  $x + 3y - 2z = 4$

Avståndet är  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , men vi kan lika gärna minimera

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \text{ under bivillkoret}$$

$$g(x, y, z) = x + 3y - 2z = 4.$$

Vi ska alltså hitta punkter som uppfyller

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} \nabla f &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla g &= (1, 3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = -2\lambda \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Sätt in  $\lambda = 2x$  i (2) och (3):

$$\begin{cases} 2y = 3 \cdot 2x \\ 2z = -2 \cdot 2x \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Sätt in  $x = y/3$  i (3) och (4):

$$\begin{cases} z = -2 \cdot y/3 \\ y/3 + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

Sätt in  $z = -\frac{2y}{3}$  i (4):

$$\frac{y}{3} + 3y - 2 \cdot \left(-\frac{2y}{3}\right) = 4$$

$$\frac{y + 9y + 4y}{3} = 4$$

$$y = \frac{6}{7} \quad z = -\frac{4}{7} \quad x = \frac{2}{7}$$

Minsta avståndet blir då  $\left(\frac{6^2 + 4^2 + 2^2}{7^2}\right)^{1/2} = \frac{(36 + 16 + 4)^{1/2}}{7} = \frac{\sqrt{56}}{7}$

3.) a) Normalen till ytan  $z = f(x, y)$   
ges av  $\nabla F$ , där  $F(x, y, z) = z - f(x, y) =$   
 $= z - x^2 - y^2$ .  $\nabla F = (-2x, -2y, 1)$ .

Normalen till  $x + y + z = 0$  är  $(1, 1, 1)$ .

Om  $(-2x, -2y, 1) = (1, 1, 1)$  måste vi

ha  $x = y = -\frac{1}{2}$ , så punkten är  
 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Tangentplanet blir då

$$(1, 1, 1) \cdot (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\underline{\underline{x + y + z = -\frac{1}{2}}}$$

b.)  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  Insättning av (1) i (2):  
 $x + y + x^2 + y^2 = 0$

Kvadratkomplettering ger:

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

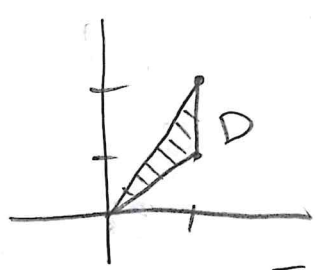
$$\text{Sätt } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) \\ y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t) \end{cases}$$

$$z(t) = x^2 + y^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) + \frac{1}{2} \cos^2(t) + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin^2(t)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(t) + \sin(t))$$

4. Integranden är inte definierad i origo.



$$\iint_D \frac{1}{x\sqrt{y}} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{y}} dy dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} [2\sqrt{y}]_x^{2x} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{2}{x} (\sqrt{2}\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(\sqrt{2}-1) \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{2}-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 =$$

$$= 4(\sqrt{2}-1) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\varepsilon})}_{=1} = \underline{\underline{4(\sqrt{2}-1)}}$$

Svar: konvergent.

5. Vi byter variabler till

$$\left. \begin{matrix} u = x \\ v = z - 2y \\ w = z \end{matrix} \right\} \text{ så att de nya gränserna blir } 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.$$

Funktionsdeterminanten är  $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

så  $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = -\frac{1}{2}$ .

Desutom har vi  $2y = z - v = w - v$ ,

så  $y = \frac{1}{2}(w-v)$ .

$$\iiint_K xy \, dx dy dz = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u \cdot \frac{w-v}{2} \, du dv dw$$



$$= -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 (w-v) w \left[ \frac{v^2}{2} \right]_0^1 dv dw =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^1 \int_0^1 w^2 - v dw dv = -\frac{1}{8} \int_0^1 \left[ wv - \frac{v^2}{2} \right]_0^1 dw$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^1 w^2 - \frac{w}{2} dw = -\frac{1}{8} \left[ \frac{w^3}{3} - \frac{w}{2} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

⑥  $\text{Area} = \iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=1 \text{ i rätt fall}} dx \, dy =$

$$= \int P \, dx + Q \, dy = (*)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) & \begin{cases} x'(t) = 3\cos^2(t) \cdot (-\sin(t)) \\ y'(t) = 3\sin^2(t) \cdot \cos(t) \end{cases} \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

$$P(x(t)) = -\frac{1}{2} \sin^3(t)$$

$$Q(x(t)) = \frac{1}{2} \cos^3(t)$$

$$(*) = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^4(t) + \sin^2(t) \cos^4(t) \, dt =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) \underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{=1} \, dt =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(2t) \, dt =$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{1 + \cos(4t)}{2} \, dt = \frac{3}{16} \left[ t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{3}{16} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}$$

7. a. Se bohen, avsnitt 2.2.

b. Se bohen, avsnitt 2.4.

8. Se bohen, avsnitt 9.4, sats 4.