Tentamen i MMGF20/LGMA50, 11/6 2019, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Ytorna $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 97$ och $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ går båda genom punkten $(3, 2, 5)$. Bestäm en tangentvektor till ytornas skärningskurva i $(3, 2, 5)$. (3p)

2. Bestäm alla lokala min och max till funktionen $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$. (3p)

3. Ta fram den allmänna lösningen till differentialekvationen $f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = 0$ genom att använda variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$. (3p)

4. Beräkna integralen
$$\iiint_K z\ dxdydz$$
där kroppen K begränsas av $z = x^2+y^2$ som nedre yta och $x^2+y^2+z^2 = 2$ som övre yta. (3p)

5. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ och γ är kurvan som parametriseras av $(x, y, z) = (\cos(t), \sin(t), t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.
   (a) Beräkna integralen med hjälp av kurvans parametrisering. (2p)
   (b) Beräkna integralen genom att hitta en potential till $\mathbf{F}$. (2p)

6. Bestäm den slutna enkla kurva γ som gör att värdet av integralen
$$\int_\gamma (6x^2y + y^3 - 20y)dx + (16x - x^3 - 6xy^2)dy$$
blir så stor som möjligt när γ genomlöps ett varv moturs, och räkna ut integralens värde i detta fall. (3p)

7. (a) Definiera vad som menas med en partiell derivata till en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (1p)
   (b) Visa att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som är differentierbar i en punkt $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ också är partiellt deriverbar i $\mathbf{a}$. (2p)

8. Visa att gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning som funktionen f växer snabbast i punkten $\mathbf{a}$, och att storleken på den maximala tillväxten är $|\nabla f(\mathbf{a})|$. (3p)